MATEMATYKA OLIMPIJSKA

⋆ ⋆ ⋆

Kombinatoryka

Beata Bogdańska   Adam Neugebauer

CZERWIEC 2018

Opracowanie graficzne: *Autorzy*

Wydanie I

ISBN: 978-83-7267-712-9

Wydawnictwo Szkolne OMEGA, 30–552 Kraków, ul. Wielicka 44 C
tel. 12 4 256 256; +48 662 152 899
www.ws-omega.com.pl e-mail: biuro@ws-omega.com.pl

Przedmowa

Przedstawiamy pierwsze całościowe chociaż nieostateczne[1] wydanie serii podręczników pod wspólnym tytułem MATEMATYKA OLIMPIJSKA. Mamy tu na myśli matematykę elementarną w zakresie wyznaczonym przez zadania OM (krajowe i międzynarodowe). Matematyka ta, mimo niewielkiego obciążenia definicyjnego, jest bliższa matematyce *akademickiej* niż matematyce *szkolnej*. Proponowany sposób wykładu (definicja, twierdzenie, przykłady, zadania i ćwiczenia[2]) jest więc bliższy akademickiemu niż szkolnemu. Szczegółowy spis treści powinien dawać dostatecznie dobre wyobrażenie o terytorium zajmowanym przez Matematykę Olimpijską w królestwie matematyki. Każdy tom kończy się krótką bibliografią, w której pokazujemy kilka źródeł dających możliwość rozszerzenia i pogłębienia przedmiotowej wiedzy. W indeksie zamieszczamy również terminy zaledwie wspomniane w tekście. Powinno to rozbudzać ciekawość Czytelników i zachęcać do samodzielnych poszukiwań w literaturze. Znak $\Diamond$ oznacza koniec rozwiązania zadania lub koniec przykładu, a znak $\square$ – koniec dowodu (lub tylko sformułowania) twierdzenia. Czasami zamiast *wtedy i tylko wtedy, gdy* piszemy iff (ang. *if and only if*), a zamiast *bez straty ogólności* piszemy b.s.o. Napis $\xi := \zeta$ oznacza: *ξ jest z definicji (z określenia) równe ζ.*

Poszczególne części *żółtego*, *zielonego* i *czerwonego* skryptów były wielokrotnie w latach 2007-2017 wydawane jako preprinty w niewielkich nakładach. Znalazły one pewne uznanie w oczach niektórych nauczycieli zajmujących się kształceniem uczniów-olimpijczyków. W szczególności, dr Jacek Dymel (Kraków), opiekun naukowy i wychowawca licznych laureatów OM i MOM, zachęcił nas do przygotowania niniejszego wydania.

Serdeczne podziękowania składamy profesorowi Andrzejowi Schinzlowi za aprobatę naszej wizji teorioliczbowej części przedsięwzięcia (pozostałe części wzorują się na niej) i wskazanie błędów. Kolega Wojtek Wawrów wskazał nam niepoliczalny zbiór usterek i błędów w poprzednich wersjach trzech części, a także kilka propozycji ulepszenia tych części. Zasłużył tym na naszą bezgraniczną wdzięczność. Nasi uczniowie (i koledzy jednego z nas) Marcin Michorzewski, Paweł Poczobut i Krzysztof Małysa w różnych okresach powstawania serii byli bardzo pomocni. Dziękujemy im za to.

APEL. Mimo licznych wysiłków, w książkach z pewnością pozostało jeszcze sporo do poprawienia. Wobec tego zwracamy się do Was, drodzy Czytelnicy, z gorącym apelem o krytyczne czytanie i informowanie o zauważonych błędach i innych niedostatkach zarówno merytorycznych jak i dydaktycznych (adres: **koloroweskrypty** @ **gmail.com**). Bylibyśmy bardzo wdzięczni za wzięcie sobie do serca tego apelu. Nasze reakcje na Wasze uwagi zamieszczamy na stronie **sites.google.com/site/koloroweskrypty**. *Autorzy*

[1] Mamy nadzieję na napisanie *Kolorowego suplementu*, w którym znajdą się brakujące na razie fragmenty.

[2] Użyte przykłady, zadania i ćwiczenia, poza trywialnymi, nie są oryginalne. Pochodzą z rozmaitych źródeł, głównie z zawodów i olimpiad matematycznych. Wyjątkowo tylko wskazujemy z jakich.

Słowo wstępne do tomu

– Tak sobie właśnie myślałem... Czerwony...
– mruczał do siebie. – Mój ulubiony kolor...

Tom trzeci ($\mathbb{KOM}$– *czerwony*) dotyczy *Kombinatoryki*. Kombinatoryka[3], zwana również matematyką dyskretną, zajmuje się zbiorami, głównie skończonymi, czasem przeliczalnymi. W kombinatoryce dany jest zbiór (*przestrzeń*) Ω i układ warunków $\mathscr{W}$. Dane te wyznaczają zbiór $\Omega(\mathscr{W})$ składający się z tych elementów przestrzeni Ω, które spełniają warunki $\mathscr{W}$. Należy rozstrzygnąć czy zbiór $\Omega(\mathscr{W})$ jest niepusty, a następnie dokładniej go opisać. Rozstrzyganie niepustości zbioru $\Omega(\mathscr{W})$ jest głównym novum w stosunku do matematyki szkolnej; zadania typu: udowodnić, że istnieje taki to a taki obiekt, tak charakterystyczne dla matematyki w ogóle i matematyki olimpijskiej w szczególności, rzadko występują w matematyce szkolnej. Czasami udaje się wykazać istnienie danego obiektu przez wskazanie lub konstrukcję. Często jednak musimy się zadowalać dowodem czysto egzystencjalnym, czyli udowadniać, że założenie nieistnienia prowadzi do sprzeczności. Podstawowymi zasadami wykorzystywanymi w kombinatorycznych dowodach egzystencjalnych są ***Zasada Szufladkowa*** i, czasami mylona z nią, ***Zasada Łat na Kapocie***, patrz *infra* rozdział 2. Na marginesie zauważmy, że jeszcze mniej szkolna sytuacja ma miejsce w **twierdzeniach o nieistnieniu**, gdzie jesteśmy skazani na dowody nie wprost. Gdy już wiemy, że obiekty o zadanych własnościach istnieją, możemy zadać pytanie o ich liczbę. Pytania tego typu należą do tak zwanej **kombinatoryki enumeratywnej**.

Ponieważ **graf skończony** jest parą dwóch zbiorów skończonych, więc nic dziwnego, że pewien zasób wiedzy o grafach uważamy za godny zamieszczenia w naszym skrypcie (zobacz rozdział 3). Z naszego punktu widzenia grafy służą wyłącznie do geometryzacji niektórych sytuacji kombinatorycznych i w zasadzie nie są obiektem badań samodzielnych. Rozdział 3 kończy paragraf poświęcony wstępowi do „myślenia” ramseyowskiego, zwieńczony ***twierdzeniem van der Waerdena***. W rozdziale czwartym omówiliśmy kilka mniej znanych, jednakże ciągle elementarnych, zagadnień kombinatoryki. Mówimy tam o **liczbach Catalana**, **funkcjach tworzących**, **podziałach i rozbiciach**, i **permutacjach z ograniczeniami**. Omawiamy niektóre aspekty ***twierdzenia Halla o kojarzeniu małżeństw***, przyglądamy się **konfiguracjom** kombinatorycznym i, wreszcie, orbitom działań grup symetrii obiektów kombinatorycznych. W rozdziale 5 mówimy trochę o, coraz częściej występujących w zadaniach olimpijskich, **układach pseudodynamicznych**, w szczególności, **grach** i ich **niezmiennikach**. Rozdział kończymy paragrafem o łamigłówkach (para)szachowych.

Mamy nadzieję, że użyte jako motta do poszczególnych rozdziałów cytaty z Milne'owskiego *Kubusia Puchatka* w genialnym tłumaczeniu Ireny Tuwim, przyczynią się do głębszego zrozumienia treści matematycznych.

Życzymy owocnej lektury.

---

[3]Samo słowo pojawiło się w matematyce dzięki Leibnizowi i jego *Dissertatio de arte combinatoria* (1666). Klasyczna łacina znała słowo *combinare* – łączyć dwie różne rzeczy. Porównaj *ciąg binarny*.

Tabliczka chronologiczna

Blaise **Pascal**	(1623 - 1666)
Isaac **Newton**	(1643 - 1727)
Gottfried Wilhelm **Leibniz**	(1646 - 1716)
Jakob **Bernoulli**	(1654 - 1705)
Leonhard **Euler**	(1707 - 1783)
Augustin **Cauchy**	(1789 - 1857)
August Ferdinand **Möbius**	(1790 - 1868)
William Rowan **Hamilton**	(1805 - 1865)
Eugène Charles **Catalan**	(1814 - 1894)
Arthur **Cayley**	(1821 - 1895)
Pafnucy **Czebyszew**	(1821 - 1894)
François Édouard **Lucas**	(1842 - 1891)
Georg **Cantor**	(1845 - 1918)
Georg **Frobenius**	(1849 - 1917)
Alan Alexander **Milne**	(1882 - 1956)
George David **Birkhoff**	(1884 - 1944)
Dénes **König**	(1884 - 1944)
Jenö **Egerváry**	(1891 - 1958)
Carlo **Bonferroni**	(1892 - 1960)
Kazimierz **Kuratowski**	(1896 - 1980)
Alfred **Tarski**	(1901 - 1983)
Frank **Ramsey**	(1903 - 1930)
Philip **Hall**	(1904 - 1982)
Emanuel **Sperner**	(1905 - 1980)
Paul **Turan**	(1910 - 1976)
Garret **Birkhoff**	(1911 - 1996)
Paul **Erdős**	(1913 - 1996)
Robert **Dilworth**	(1914 - 1993)

Spis treści

Rozdział 0

Przekąska

Puchatek lubił przekąsić swoje małe Conieco o jedenastej rano i cieszył się bardzo, widząc, jak Królik wydobywa z szafki garnuszki i talerze...

Jako przekąskę proponujemy kilka klasycznych zadań charakteru kombinatorycznego.

0.1 Garnuszek zadań na przekąskę

Zadania podzieliliśmy na parę podgrup. W zadaniach o znajomych, przyjaciołach i wrogach zakłada się symetrię relacji znajomości, przyjaźni i wrogości.

A. Zadania o znajomych, przyjaciołach i wrogach

ZADANIE 0.A1 Udowodnić, że wśród dowolnych sześciu osób istnieje taka trójka, w której wszyscy się znają, albo taka trójka, w której nikt nie zna nikogo.

ZADANIE 0.A2 W pewnym mitycznym parlamencie żaden poseł nie ma więcej niż trzech wrogów. Dowieść, że można tak podzielić posłów na dwie grupy, by każdy poseł miał co najwyżej jednego wroga w swojej grupie.

ZADANIE 0.A3 W klasie Janka jest 33 uczniów. Janek zauważył, że każdy z pozostałych 32 uczniów ma inną liczbę przyjaciół w tej klasie. Ilu przyjaciół ma w tej klasie Janek?

ZADANIE 0.A4 W sali znajduje się 100 osób, z których każda zna co najmniej 67 z pozostałych 99. Dowieść, że w tej sali znajdzie się taka czwórka osób, w której wszyscy znają wszystkich. Dowieść, że możliwy jest taki rozkład znajomości w tej sali, że każda osoba zna co najmniej 66 innych, ale nie ma tam żadnej czwórki, w której wszyscy znaliby wszystkich.

ZADANIE 0.A5 Dany jest taki skończony zbiór $\mathcal{B}$ punktów przestrzeni, że każde dwie odległości między punktami tego zbioru są różne. Każdy punkt zbioru $\mathcal{B}$ łączymy odcinkiem z najbliższym mu punktem zbioru $\mathcal{B}$. Jeden (dowolnie wybrany) z otrzymanych odcinków malujemy na czerwono, wszystkie pozostałe na zielono. Dowieść, że istnieją takie dwa punkty zbioru $\mathcal{B}$, których nie można połączyć łamaną złożoną z odcinków zielonych.

ZADANIE 0.A6 Na obozie przygotowawczym do OM, w którym brało udział 40 uczniów, należało zreferować rozwiązania 40 (zadanych przedtem) zadań. Okazało się, że każdy uczeń rozwiązał dokładnie 2 zadania i że każde zadanie zostało rozwiązane przez dokładnie dwóch uczniów. Dowieść, że pani Beata (szefowa obozu) może tak zorganizować Sesję Omówień, by każdy uczeń omawiał jedno rozwiązane przez siebie zadanie i wszystkie zadania były omówione.

ZADANIE 0.A7 Każdy z 50 uczestników konferencji ma wśród pozostałych co najmniej 25 znajomych. Dowieść, że można ich tak zakwaterować w pokojach dwuosobowych, by każdy mieszkał ze swoim znajomym.

B. O ważeniu monet, krów i liczb

ZADANIE 0.B1 Mamy 10 rulonów po 50 monet. Wiemy, że w 9 z nich są wyłącznie monety prawdziwe, o wadze $10\,g$ każda, a w jednym są tylko monety fałszywe, o wadze $9\,g$ każda. Możesz r a z skorzystać z dokładnej wagi. Wyznacz rulon monet fałszywych.

ZADANIE 0.B2 Danych jest 12 monet, wśród których jedna jest f a ł s z y w a (ma ona wagę i n n ą niż prawdziwe monety). Za pomocą trzech ważeń-porównań na wadze szalkowej wskazać monetę fałszywą i określić, czy jest ona lżejsza czy cięższa od pozostałych.

ZADANIE 0.B3 Dany jest zbiór 2016 monet, wśród których jedna jest fałszywa, lżejsza od pozostałych (ważących tyle samo). Wykazać, że s i e d e m ważeń-porównań na wadze szalkowej (bez odważników) w y s t a r c z a do wskazania monety fałszywej.

ZADANIE 0.B4 Waga (w gramach) każdej z danych 101 krów jest liczbą całkowitą dodatnią. Ponadto, spełniony jest warunek: jeżeli odstawimy na bok dowolną z tych krów, to pozostałe 100 można podzielić na takie dwie podgrupy po 50 krów, że suma wag krów jednej grupy jest równa sumie wag krów drugiej. Udowodnić, że każda krowa waży tyle samo gramów.

ZADANIE 0.B5 Danych jest mn różnych liczb rzeczywistych a_{ij} ustawionych w tablicy

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}$$

Niech l_i będzie najmniejszą liczbą i-tego wiersza, a g_j największą liczbą j-tej kolumny. Udowodnić, że $\min\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \geqslant \max\{l_1, l_2, \dots, l_m\}$, czyli że najmniejsza z największych jest niemniejsza niż największa z najmniejszych.

ZADANIE 0.B6 Wiemy, że liczby rzeczywiste a_i, b_j są (parami) różne, przy czym

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{1008} \qquad \text{oraz} \qquad b_1 < b_2 < \dots < b_{1009}.$$

Udowodnić, że za pomocą jedenastu porównań[1] można wykryć medianę[2] 2017-elementowego zbioru $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} := \{a_1, \dots, a_{1008}\} \cup \{b_1, \dots, b_{1009}\} = \{a_1, \dots, a_{1008}, b_1, \dots, b_{1009}\}$.

C. Kombinowanie w geometrii

ZADANIE 0.C1 Danych jest pięć prostych i pięć punktów. Udowodnić, że można wybrać dwie z tych prostych i dwa z tych punktów tak, że żadna z wybranych prostych nie przechodzi przez żaden z wybranych punktów.

[1] *Porównanie* w danym zbiorze liczb rzeczywistych polega na wyborze dwóch elementów a, b tego zbioru i ustaleniu czy $a < b$, czy $b < a$. Można tu myśleć (i mówić) o ważeniu na wadze szalkowej.

[2] **Medianą** danego, mającego $2k+1$ elementów, zbioru liczb rzeczywistych nazywamy tę liczbę tego zbioru, od której jest dokładnie k liczb mniejszych (w tym zbiorze) i dokładnie k liczb większych (w tym zbiorze).

ZADANIE 0.C2 Żadne trzy z danych pięciu punktów płaszczyzny nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że pewne cztery z tych punktów są wierzchołkami czworokąta wypukłego.

ZADANIE 0.C3 Dany jest 10-kąt wypukły $\mathcal{W}$. Czworokąt wypukły nazwiemy *przekątniowym*, gdy jego wierzchołkami są (niektóre) wierzchołki wielokąta $\mathcal{W}$, a bokami są przekątne (nie boki!) wielokąta $\mathcal{W}$. Wyznaczyć liczbę czworokątów przekątniowych.

ZADANIE 0.C4 Dane jest koło i 10 punktów na okręgu tego koła. Załóżmy, że żadne trzy cięciwy o końcach w tych punktach nie przecinają się w jednym punkcie wewnątrz koła. Na ile obszarów dzielą koło te cięciwy?

ZADANIE 0.C5 Cztery odcinki pokrywają odcinek długości 2. Udowodnić, że można wyrzucić niektóre z nich tak, by pozostałe były parami rozłączne i suma ich długości była równa co najmniej 1.

ZADANIE 0.C6 2017 półpłaszczyzn pokrywa płaszczyznę. Udowodnić, że można wybrać trzy z tych półpłaszczyzn, które pokrywają płaszczyznę.

ZADANIE 0.C7 Rozciąć prostokątną kartkę papieru na jak najmniejszą liczbę r ó ż n y c h kwadratów.

ZADANIE 0.C8 Dany jest prostokątny układ współrzędnych Oxy. Wielokąt $A_1A_2\dots A_n$ nazywamy **wielokątem kratowym**, gdy wszystkie jego wierzchołki są punktami kratowymi[3]. Udowodnić tak zwane ***Twierdzenie Picka***: *Pole wielokąta kratowego wyraża się wzorem*

$$\boxed{S = w + \tfrac{1}{2}b - 1,}$$

gdzie w oznacza liczbę punktów kratowych leżących wewnątrz wielokąta, a b oznacza liczbę punktów kratowych leżących na brzegu wielokąta.

D. Rozmieszczanie i przydzielanie

ZADANIE 0.D1 Na stole leży stos pieniędzy w nominałach od 1 gr do 100 zł. Po przeliczeniu okazało się, że jest tam dokładnie 1000 zł. Dowieść, że można tak te pieniądze powkładać do dziesięciu sakiewek, by w każdej sakiewce było dokładnie 100 złotych.

ZADANIE 0.D2 Oficjalną walutą *Karelirii* jest, jak wiadomo[4], *ferklos*. *Wspanialcy* (obywatele Karelirii) używają monet o nominałach k fk, gdzie k jest liczbą naturalną mniejszą niż 36. Udowodnić, że kwotę 1350 ferklosów można rozmieścić w 11 sakiewkach tak, by w żadnej nie było więcej niż 150 fk.

ZADANIE 0.D3 W pewnym kraju bije się monety o wartości $\frac{1}{n}$ seków dla dowolnych liczb naturalnych n. Udowodnić, że jeżeli mamy stos takich monet, o sumarycznej wartości L seków, gdzie $L \leqslant 99,5$, to można je rozmieścić w 100 sakiewkach, przy czym tak, że wartość monet w jednej sakiewce nie przekracza 1 seka.

ZADANIE 0.D4 Ile co najmniej zamków (na przykład typu *yale*) należy założyć do sejfu tak, by dowolnie wybrana 3-osobowa grupa spośród danych 4 osób, była w stanie otworzyć ten sejf, ale żadna 2-osobowa grupa nie mogła tego zrobić?

[3]Punkt (x, y) nazywamy **punktem kratowym**, gdy obie jego współrzędne x (odcięta) i y (rzędna) są liczbami całkowitymi.

[4]zob. *Dzienniki gwiazdowe* Stanisława Lema.

ZADANIE 0.D5 Udowodnić, że nie istnieje taki ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ długości 10 o wyrazach rzeczywistych, że suma dowolnych czterech jego kolejnych wyrazów jest liczbą dodatnią, a suma dowolnych siedmiu jego kolejnych wyrazów jest liczbą ujemną.

ZADANIE 0.D6 Zbiór dokumentów rozdzielono na n części dając je do przechowania n osobom. Dowieść, że jeżeli $n \geqslant 4$, to wystarczy $2n - 4$ rozmów telefonicznych między tymi osobami, po przeprowadzeniu których każda z tych osób może zapoznać się z treścią wszystkich dokumentów.

ZADANIE 0.D7 Każdy z 30 członków klubu miał początkowo kapelusz. Pewnego dnia każdy z nich wysłał swój kapelusz innemu członkowi klubu (można było otrzymać więcej niż jeden kapelusz). Udowodnić, że istnieje grupa 10 członków, z których żaden nie otrzymał kapelusza od innej osoby z tej grupy.

ZADANIE 0.D8 Na pierwszej kartce wypisujemy pracowicie wszystkie liczby od 1 do 1000 (zapisane w systemie dziesiętnym). Na drugiej (dużej!, jak dużej?) kartce wypisujemy wszystkie liczby od 1 do 10 000. Udowodnić, że liczba wszystkich cyfr na pierwszej kartce równa jest liczbie cyfr 0 na drugiej kartce.

E. Dwa zadania o bibliotece

ZADANIE 0.E1 W każdej trójce czytelników, którzy pewnego dnia odwiedzili czytelnię znajdzie sie takich dwóch, którzy byli w czytelni jednocześnie. Udowodnić, że kierownik czytelni mógł dwukrotnie tego dnia wygłosić komunikat tak, by każdy czytelnik (z tego dnia) mógł go usłyszeć.

ZADANIE 0.E2 W czytelni, przy drzwiach wejściowych, zamontowano dwie tablice: tablicę P i tablicę K. Każdy czytelnik, przed zajęciem swojego miejsca, przelicza wszystkich już siedzących przy stolikach i wpisuje na tablicy P ich liczbę (to może być liczba 0, gdy wchodzi do pustej czytelni). Wychodząc do domu (lub gdzieś indziej), przelicza wszystkich siedzących przy stolikach i wpisuje na tablicy K ich liczbę (to może być liczba 0, gdy wychodzi jako ostatni). Udowodnić, że wieczorem, po wyjściu ostatniego czytelnika, pan kierownik czytelni zobaczy te same liczby na tablicy P co na tablicy K (jakoś poprzestawiane).

F. Kombinowanie w języku i nie tylko

ZADANIE 0.F1 (Zadanie Halmosa) W pewnym miasteczku mieszka 345 zamężnych matematyczek. Każda z nich wie w każdej chwili czy mąż innej jest wierny czy nie, nic nie wie jednak o swoim mężu. Prawo tego miasteczka wymaga aby każdy, kto jest w stanie p r z e p r o w a d z i ć d o w ó d niewierności swojego partnera, zastrzelił go na specjalnym miejscu straceń tego samego dnia o zachodzie słońca. Każda matematyczka jest absolutnie inteligentna i absolutnie prawomyślna. Pewnego dnia pani burmistrz (jedyna niezamężna w miasteczku) ogłosiła, że w miasteczku s ą niewierni mężowie. Zakazała porozumiewania się paniom matematyczkom w rzeczonej sprawie, jednocześnie nakazując przeprowadzanie rozumowań dowodowych. W rzeczywistości w miasteczku było 40 niewiernych mężów. Co się stanie w miasteczku po ogłoszeniu pani burmistrz?

ZADANIE 0.F2 Oto relacja z pewnego spotkania:

Drogie panie – zwrócił się pan Staszek do, siedzących po obu stronach kawiarnianego stolika, matematyczek Ideli i Adeli – jeżeli pozwolicie, chciałbym wystawić was na próbę. Wybrałem – ciągnął – dwie liczby naturalne $m \geqslant 2$ i $n \geqslant 2$. Po dodaniu tych liczb otrzymałem mniejszą

niż 100 *liczbę* A, *którą zapisałem na karteczce czerwonej. Po ich pomnożeniu otrzymałem liczbę* I, *którą zapisałem na karteczce niebieskiej. To mówiąc, podał pani Adeli czerwoną, a pani Ideli niebieską karteczkę. Po dłuższej chwili odezwała się Idela.*
– Nie wiem jakie to liczby – rzekła, z trudem kryjąc rozczarowanie.
– Wiedziałam to – spokojnie odparła Adela.
– Skoro tak, to ja już wiem jakie to liczby – niedbale powiedziała Idela.
– To ja też już wiem – z wyraźną ulgą dodała Adela, patrząc nieco z góry na pana Staszka.

Po zapoznaniu się z powyższą relacją, wyznaczyć zbiór $\{m, n\}$.

0.2 Rozwiązania i komentarze

Pokazujemy dość szczegółowe rozwiązania i rozbudowane komentarze.

Z0.A1 Oznaczmy przez A dowolną z tych osób, i przez B, C, D, E, F pozostałe osoby. Zauważmy, że zachodzi jedna z dwóch możliwości: (1) A zna trzy z pozostałych osób, na przykład B, C, D, (2) A nie zna trzech z pozostałych osób, na przykład B, C, D. Więcej możliwości nie ma!

Przypadek (1) ma dwa podprzypadki: (1a) osoby B, C, D są sobie obce i wówczas mamy trójkę, w której nikt nie zna nikogo!; (1b) wśród osób B, C, D znajdzie się para znajomych. Na przykład B zna C. Wtedy mamy trójkę A, B, C, w której wszyscy się znają.

Przypadek (2) ma zaś podprzypadki: (2a) osoby B, C, D wszystkie są znajomymi (i mamy trójkę znajomków), albo (2b) wśród osób B, C, D znajdzie się para nieznajomych. Na przykład B nie zna C. Wtedy mamy trójkę A, B, C, w której nikt nie zna nikogo.

U w a g a. W innym nieco języku omawiamy to samo zadanie w ustępie 3.4.1.

Z0.A2 Podstawową wykorzystywaną tu zasadą jest Zasada Minimum. Dzielimy dowolnie posłów na dwie grupy i wyznaczamy liczbę $W = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$, gdzie w_i oznacza liczbę wrogów, jakich i-ty poseł ma w swojej grupie. Wybierzmy ten podział, dla którego liczba W jest n a j m n i e j s z a. Twierdzimy, że przy tym podziale żaden poseł nie ma więcej niż jednego wroga w swojej grupie. Rzeczywiście, gdyby poseł A miał dwóch wrogów w swojej grupie, to miałby co najwyżej jednego wroga w drugiej grupie. Po przeniesieniu posła A do drugiej grupy dostalibyśmy podział z m n i e j s z ą liczbą W, a to jest niemożliwe.

Z0.A3 Oznaczmy przez $p(X)$ liczbę przyjaciół ucznia X w badanej klasie. Rozwiązujemy zadanie ogólniejsze, z liczbą $2n+1$ zamiast 33. Najpierw ustawmy wszystkich uczniów, oprócz Janka, w taki ciąg $(A_1, A_2, \ldots, A_{2n})$, że

$$p(A_1) < p(A_2) < \cdots < p(A_{2n}). \tag{0.1}$$

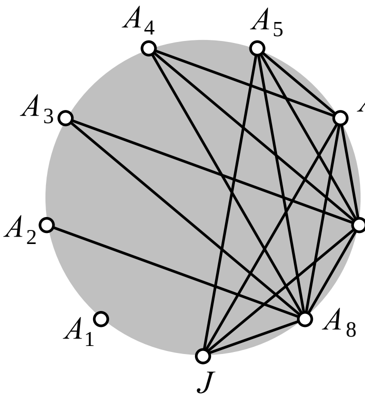
Mamy tu $2n$ liczb całkowitych nieujemnych, różnych i niewiększych niż $2n$. Możliwe są dwa przypadki: (1) $p(A_1) \neq 0$, (2) $p(A_1) = 0$.

W przypadku (1) m u s i być $p(A_i) = i$. Rzeczywiście, jedynym ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych długości $2n$, którego największy wyraz jest $\leqslant 2n$, jest ciąg $(1, 2, \ldots, 2n)$. W przypadku (2) m u s i być $p(A_i) = i - 1$. Rzeczywiście, gdy $p(A_1) = 0$, czyli gdy uczeń A_1 nikogo nie lubi, to nie lubi też ucznia A_{2n}, więc $p(A_{2n}) \leqslant 2n - 1$.

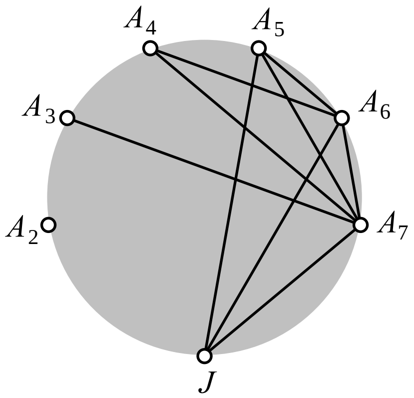
Dowiedziemy przez indukcję względem n, że $p(J) = n$, gdzie J oznacza Janka.

B a z a indukcji, $n = 1$. Wówczas, jeżeli $p(A_1) = 0, p(A_2) = 1$, to uczeń A_2 przyjaźni się z Jankiem i Janek nie ma innych przyjaciół, więc $p(J) = 1$. Jeżeli zaś $p(A_1) = 1, p(A_2) = 2$, to uczeń A_2 przyjaźni się z A_1 i z Jankiem, a Janek również nie ma innych przyjaciół, więc znowu $p(J) = 1$.

K r o k indukcyjny, $n \rightsquigarrow n + 1$. Załóżmy, że $p(A_1) = 0$. Usadźmy wszystkich uczniów wokół okrągłego stołu tak jak na rysunku, gdzie pokazano przypadek $n + 1 = 4$. Wyprośmy od stołu uczniów A_1 i $A_{2(n+1)}$ i zapomnijmy o wszystkich przyjaźniach ucznia $A_{2(n+1)}$. Ponieważ $A_{2(n+1)}$ dotychczas przyjaźnił się z wszystkimi oprócz A_1, więc teraz każdy z $2n$ uczniów $A_2, A_3, \ldots, A_{2n+1}$ ma o jednego przyjaciela mniej, mianowicie $p(A_2) = 0, \ldots, p(A_{2n+1}) = 2n-1$, więc jesteśmy w sytuacji z założenia indukcyjnego. Wobec tego, na mocy tego założenia, Janek ma n przyjaciół wśród uczniów $A_2, A_3, \ldots, A_{2n+1}$. Ponieważ lubi kolegę A_{2n+2}, więc mamy $p(J) = n+1$. Przypadek, gdy $p(A_1) = 1$ rozpatruje się tak samo.



Rys. 0.A3



U w a g a. Oto spotykana czasem próba rozwiązania zadania: Oznaczmy $x = p(J)$. Następnie za pomocą wyimaginowanego przełącznika zamieńmy w klasie Janka wszystkie przyjaźnie na nieprzyjaźnie, a wszystkie nieprzyjaźnie na przyjaźnie. W tak zmienionej klasie, oznaczając przez $p'(X)$ liczbę przyjaciół ucznia X, mamy oczywiście $p'(X) = 2n - p(X)$. Wobec tego Janek widzi, że każdy (oprócz niego) ma inną liczbę przyjaciół. Więc $p'(J) = x$. Stąd $x = 2n - x$, czyli $x = n$. Podkreślmy, że takie „rozwiązanie", z punktu widzenia matematyki, jest co najwyżej *heurezą* pozwalającą odgadnąć odpowiedź. Dla otrzymania matematycznie satysfakcjonującego rozwiązania trzeba jeszcze uzasadnić i s t n i e n i e liczby x (tzn., że dane w y z n a c z a j ą odpowiedź).

Na zakończenie proponujemy jeszcze taką wersję tego zadania:

Z a d a n i e. Janek zauważył, że w jego n-osobowej klasie każdy uczeń ma co najmniej jednego przyjaciela w tej klasie i każdy, z wyjątkiem niego samego, ma inną liczbę przyjaciół. Ilu przyjaciół ma w tej klasie Janek?

Z0.A4 Rozwiążemy najpierw drugą część zadania. Niech Ω będzie 100-osobowym zbiorem obcych sobie (początkowo) osób. Zapiszmy Ω w postaci sumy $\Omega = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ trzech podzbiorów r o z ł ą c z n y c h, gdzie[5] $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = 33$, a $|\mathcal{C}| = 34$. Przedstawmy teraz każdą osobę ze zbioru $\mathcal{A}$ każdej osobie ze zbiorów $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$, każdą osobę ze zbioru $\mathcal{B}$ każdej osobie ze zbiorów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$, a każdą osobę ze zbioru $\mathcal{C}$ każdej osobie ze zbiorów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Innych „przedstawień" nie dokonujemy. Jeżeli wówczas K, L, M, N jest dowolną czwórką osób, to co najmniej dwie z nich należą do jednego ze zbiorów $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ lub $\mathcal{C}$. I te osoby są sobie obce. Jednocześnie każda osoba ze zbiorów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ zna 67 innych, a każda osoba ze zbioru $\mathcal{C}$ zna 66 innych.

Rozwiązanie p i e r w s z e j części: Niech Ω będzie zbiorem osób obecnych w sali. Dla dowolnego $S \in \Omega$ mamy rozkład[6] $\Omega = \{S\} \sqcup \mathcal{Z}(S) \sqcup \mathcal{N}(S)$, gdzie $\mathcal{Z}(S)$ oznacza zbiór wszystkich (różnych od S) znajomych osoby S znajdujących się w sali, a $\mathcal{N}(S)$ – zbiór nieznajomych osoby S. Wiemy, że dla każdego $S \in \Omega$ $|\mathcal{Z}(S)| + |\mathcal{N}(S)| = 99$, skąd, ponieważ $|\mathcal{Z}(S)| \geqslant 67$, mamy:

$$|\mathcal{N}(S)| \leqslant 32. \tag{0.2}$$

[5]Przez $|X|$ oznaczamy liczbę elementów skończonego zbioru X, zob. ustęp 1.3.1.

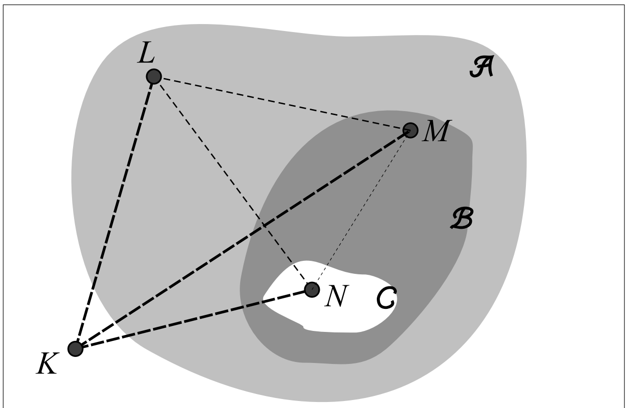
[6]Przez $\mathcal{D} \sqcup \mathcal{E}$ oznaczamy **sumę rozłączną** zbiorów $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$. Pisząc równość postaci $\Omega = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} \sqcup \mathcal{C}$, zaznaczamy, że Ω jest sumą swoich p a r a m i r o z ł ą c z n y c h podzbiorów $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$.

Wybierzmy z sali dowolną osobę K. Zbiór $\mathcal{A} = \mathcal{Z}(K)$ jej znajomych ma, zgodnie z założeniem, co najmniej 67 elementów: $|\mathcal{A}| \geqslant 67$. Wybierzmy więc dowolnego znajomego $L \in \mathcal{A}$, zob. rysunek 0.A4. Zbiór $\mathcal{A}$ jest sumą zbioru jednoelementowego $\{L\}$, zbioru $\mathcal{B} := \mathcal{A} \cap \mathcal{Z}(L)$ znajomych osoby L (w zbiorze $\mathcal{A}$) i zbioru $\mathcal{A} \cap \mathcal{N}(L)$ nieznajomych osoby L w zbiorze $\mathcal{A}$. Ponieważ $|\mathcal{A} \setminus \{L\}| \geqslant 66$, a $|\mathcal{N}(L) \cap \mathcal{A}| \leqslant |\mathcal{N}(L)| \leqslant 32$, więc $|\mathcal{B}| \geqslant 34$. Wybierzmy dowolną osobę $M \in \mathcal{B}$. Pozostałych osób w $\mathcal{B}$ jest $\geqslant 33$. Na mocy nierówności (0.2), nie wszystkie są nieznajomymi osoby M, więc zbiór $\mathcal{C}$ osób znajomych osoby M w zbiorze $\mathcal{B}$ jest niepusty. Wybierając dowolną osobę $N \in \mathcal{C}$, mamy 4 osoby K, L, M i N, które wszystkie znają się między sobą. Widać to doskonale na rysunku.

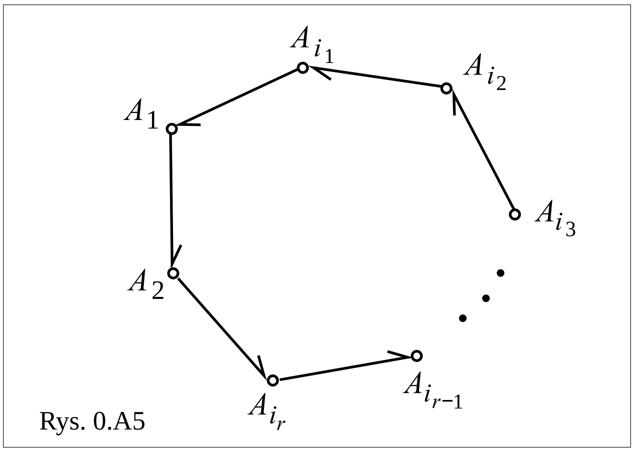
Uwaga 1. Czytelnik zechce z pewnością udowodnić takie twierdzenia:

Twierdzenie. *Jeżeli w danej n-osobowej grupie osób każda zna co najmniej $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1$ innych osób tej grupy, to w grupie tej istnieje 4-osobowa* ***klika***[7].

Twierdzenie. *Istnieje taki rozkład znajomości w danej grupie n-osobowej, że każdy osobnik ma co najmniej $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ znajomych, a w grupie tej nie ma żadnej 4-kliki.*



Rys. 0.A4



Rys. 0.A5

Z0.A5 Niech $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Napis $A_i \rightharpoonup A_j$ będzie oznaczał, że z punktu A_i najbliżej jest do punktu A_j. Zauważmy, że napisy $A_i \rightharpoonup A_j$ i $A_k \rightharpoonup A_j$ mogą być jednocześnie prawdziwe. Aliści zachodzi oczywiste(!) Stwierdzenie. *Jeżeli $A_i \rightharpoonup A_j$ i $A_i \rightharpoonup A_k$, to $A_j = A_k$.*

Załóżmy (b.s.o.), że $A_1 \rightharpoonup A_2$ i że odcinek $\overline{A_1A_2}$ jest pomalowany na czerwono. Udowodnimy, że *punktów A_1, A_2 nie da się połączyć zieloną łamaną*. Załóżmy w tym celu, nie wprost, że $A_1A_{i_1} \ldots A_{i_r}A_2$ jest łamaną, w której odcinki $\overline{A_1A_{i_1}}, \overline{A_{i_1}A_{i_2}}, \ldots, \overline{A_{i_r}A_2}$ są zielone. Wówczas musi być $A_{i_1} \rightharpoonup A_1$ (w przeciwnym bowiem razie byłoby $A_1 \rightharpoonup A_{i_1}$, co, wobec założenia $A_1 \rightharpoonup A_2$ i powyższego stwierdzenia, jest możliwe tylko, gdy $A_2 = A_{i_1}$, w którym to przypadku odcinek $\overline{A_1A_{i_1}} = \overline{A_1A_2}$ byłby jednocześnie zielony i czerwony!). Tak samo łatwo wykazać (zob. rys. 0.A5), że

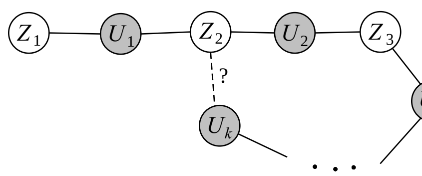
$$A_1 \leftharpoonup A_{i_1} \leftharpoonup A_{i_2} \leftharpoonup \cdots \leftharpoonup A_{i_r} \leftharpoonup A_2.$$

Stąd nierówności: $|A_2A_1| < |A_1A_{i_1}| < |A_{i_1}A_{i_2}| < \cdots < |A_2A_{i_r}| < |A_2A_1|$. Sprzeczność!

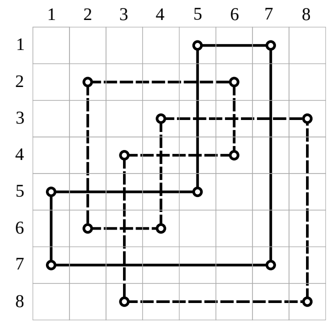
Z0.A6 Pani Beata zaprasza do tablicy dowolnego ucznia U_1 i pozwala mu omówić dowolne z rozwiązanych przez niego zadań. Uczeń U_1 zaczyna omówienie od zapisania na tablicy numeru (Z_1) wybranego zadania. Kończąc zaś, zapisuje na tablicy numer Z_2 drugiego rozwiązanego przez siebie zadania. To „wywołuje" do tablicy tego (jedynego!) ucznia U_2, który rozwiązał zadanie numer Z_2. Uczeń U_2 prezentuje rozwiązanie zadania Z_2 i zapisuje na tablicy numer Z_3 drugiego z rozwiązanych przez siebie zadań, wywołując tym samym do tablicy (jedynego!) ucznia U_3, który je rozwiązał.

[7]Specjaliści od **teorii grafów** (*grafiści*?, *graficy*?) używają terminu klika bez złych podtekstów. Chodzi tylko i wyłącznie o to, że w klice wszyscy znają wszystkich. O klikach powiemy słów parę w ustępie 3.1.10.

I tak dalej. Należy teraz zauważyć, że ten proces musi się „zapętlić”, to znaczy, że któryś z uczniów, po rozwiązaniu swojego zadania, napisze na tablicy numer zadania już rozwiązywanego. To musi się



Rys. 0.A6a



Rys. 0.A6b

zdarzyć najpóźniej w 40 kroku (w przeciwnym razie nastąpiłoby „rozmnożenie” zadań). Co więcej „zapętlenie” następuje „na” zadaniu Z_1. Rzeczywiście, „zapętlenie” na zadaniu różnym od Z_1 (na przykład, Z_2, zob. rysunek 0.A6a), mogłoby nastąpić, gdyby to zadanie rozwiązało trzech uczniów (w przykładzie z rysunku, uczniowie U_1, U_2 i U_k), co jest niezgodne z założeniem. Jeżeli „zapętlenie” następuje przy 40 uczniu, to koniec. Jeżeli następuje wcześniej, to pani Beata zaprasza do tablicy dowolnego ucznia, który jeszcze nie występował, i tak dalej. Tu trzeba jeszcze wykazać, że w zbiorze tych uczniów każdy rozwiązał dwa (jeszcze nie omawiane) zadania i każde z tych zadań było rozwiązane przez dwóch uczniów, którzy jeszcze nie występowali.

U w a g a. To jest również zadanie o znajomościach! Przy czym relacja znajomości może zachodzić wyłącznie między uczniami a zadaniami (zadania się nie znają i, co ciekawsze, uczniowie również się nie znają!). Takie sytuacje kombinatoryczne koduje się za pomocą tak zwanych **grafów dwudzielnych**. Zobacz ustęp 3.1.9. Ta sama (co w zadaniu o pani Beacie) idea grafu dwudzielnego leży u podstaw poniższego zadania, zobacz rysunek 0.A6b:

Ć w i c z e n i e. Zaznaczono 16 z 64 pól standardowej szachownicy, przy czym tak, że w każdej kolumnie i w każdym wierszu zaznaczono dokładnie dwa pola. Udowodnić, że można na zaznaczonych polach tak rozstawić 8 wież białych i 8 wież czarnych, by wieże tego samego koloru się nie szachowały.

Z0.A7 Załóżmy, że $\{A_1, A_2\}$, $\{A_3, A_4\}$, $\ldots$, $\{A_{2r-1}, A_{2r}\}$ jest rodziną par znajomych (spośród uczestników konferencji). Umieszczamy każdą z tych par w osobnym pokoju. Jeżeli $r = 25$, to dobrze! Jeżeli zaś $r < 25$, to pozostałych uczestników, $B_1, B_2, \ldots, B_{2s}$ (gdzie $s + r = 25$), „usadzamy” w fotelach stojących w hallu hotelowym. Gdyby wśród $B_1, B_2, \ldots, B_{2s}$ było dwóch znajomych, moglibyśmy umieścić ich w $(r+1)$-szym pokoju. Załóżmy więc, że w zbiorze $\{B_1, B_2, \ldots, B_{2s}\}$ nikt nikogo nie zna. W szczególności, B_1 i B_2 są sobie obcy. Oznaczmy przez $\mathcal{Z}_1$ zbiór znajomych uczestnika B_1, a przez $\mathcal{Z}_2$ zbiór znajomych uczestnika B_2. Oba zbiory $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ są podzbiorami zbioru $\{A_1, A_2, \ldots, A_{2r}\}$ i każdy ma co najmniej 25 elementów.

Każdemu uczestnikowi $A_1, \ldots, A_{2r}$ każemy napisać na kartce liczbę 0, gdy nie zna ani B_1 ani B_2, liczbę 1, gdy zna dokładnie jednego z B_1, B_2 i liczbę 2, gdy zna obu uczestników B_1, B_2. Przez p_i oznaczmy sumę liczb napisanych przez siedzących w i-tym pokoju uczestników A_{2i-1}, A_{2i}. Jasne, że $p_1 + p_2 + \cdots + p_r = |\mathcal{Z}_1| + |\mathcal{Z}_2|$ (suma $p_1 + p_2 + \cdots + p_r$ oznacza bowiem liczbę „nici znajomości” łączących uczestników $A_1, A_2, \ldots, A_{2r}$ z uczestnikam B_1, B_2). Skąd $p_1 + p_2 + \cdots + p_r \geqslant 50$.

Stąd wynika, że co najmniej jedna z liczb p_i jest > 2 (gdyby wszystkie liczby p_i były $\leqslant 2$, mielibyśmy nierówność $p_1 + \cdots + p_r \leqslant 2r < 50$).

B.s.o. załóżmy, że $p_1 > 2$, czyli $p_1 \geqslant 3$. Ta nierówność oznacza, że co najmniej jeden (na przykład A_1) z siedzących w pierwszym pokoju, zna zarówno B_1 jak i B_2, i jednocześnie A_2 zna co najmniej jednego (na przykład uczestnika B_1). W takiej sytuacji możemy zaprosić do hallu uczestników A_1, A_2, utworzyć dwie pary znajomych $\{A_1, B_2\}$, $\{A_2, B_1\}$ i jedną z nich wysłać do pokoju numer 1, a drugą do „nowego”, $(r+1)$-szego, pokoju.

U w a g a 1. Czytelnik powinien uogólnić zadanie (i rozwiązanie), zastępując liczbę 50 przez $2n$.

U w a g a 2. Czytelnik znający twierdzenie Ore'go (zob. *infra*), znajdzie(?!) Z0.A7 trywialnym.

Z0.B1 Numerujemy rulony liczbami od 1 do 10, z k-tego wyjmujemy k monet i wszystkie te wyjęte monety ważymy. Jeżeli w jest, wyrażoną w gramach, sumą wag wyjętych monet, to $550 - w$ jest numerem rulonu z monetami fałszywymi.

Z0.B2 Ponumerujmy te monety liczbami naturalnymi $1, 2, \ldots, 12$. Będziemy używać następującej notacji: Zapis postaci $((1, 3, 4)) \sim ((5, 7, 11))$ oznacza, że kładziemy na pierwszej szalce monety 1-szą, 3-cią i 4-tą, a na drugiej szalce, monety 5-tą, 7-mą i 11-tą. Jeżeli w takiej sytuacji szalka pierwsza przeważyła, piszemy $((1, 3, 4)) > ((5, 7, 11))$. Napisy postaci $((1, 3, 4)) < ((5, 7, 11))$, $((1, 3, 4)) \neq ((5, 7, 11))$ czy $((1, 3, 4)) = ((5, 7, 11))$, mają oczywiste znaczenie.

Przypadek (1): $((5, 6, 7, 8)) = ((9, 10, 11, 12))$. Wówczas jest oczywiste, że fałszywa moneta ma jeden z numerów 1, 2, 3 lub 4.

Podprzypadek (1a): $((1, 2, 3)) = ((5, 6, 7))$. W tym podprzypadku fałszywą jest moneta numer 4 i jedno (trzecie!) ważenie-porównanie z dowolną z monet prawdziwych pozwala określić czy jest ona cięższa czy lżejsza od monety prawdziwej.

Podprzypadek (1b): $((1, 2, 3)) \neq ((5, 6, 7))$. W tym podprzypadku fałszywą jest oczywiście jedna z monet 1, 2 lub 3. Przy czym, jeżeli $((1, 2, 3)) > ((5, 6, 7))$, to jest ona cięższa, a jeżeli $((1, 2, 3)) < ((5, 6, 7))$, to jest ona lżejsza. Wyznaczenie za pomocą jednego (trzeciego!) ważenia monety fałszywej z danych trzech, gdy wiemy czy jest lżejsza czy cięższa, jest fraszką.

Przypadek (2): $((5, 6, 7, 8)) \neq ((9, 10, 11, 12))$. Ewentualnie przenumerowując, możemy założyć, że $((5, 6, 7, 8)) > ((9, 10, 11, 12))$. Wówczas możliwe są trzy podprzypadki: (2a), (2b) lub (2c). Rozważamy je kolejno:

Podprzypadek (2a): $((5, 6, 9)) = ((7, 8, 10))$. Wtedy fałszywą jest moneta 11-ta lub 12-ta. Ponadto, jest ona lżejsza! I wystarczy wykonać (trzecie!) ważenie $((11)) \sim ((1))$.

Podprzypadek (2b): $((5, 6, 9)) > ((7, 8, 10))$. Wtedy monety 7-ma, 8-ma i 9-ta są prawdziwe, a fałszywą jest moneta 5-ta albo 6-ta albo 10-ta. Przy czym, jeżeli fałszywą jest moneta 5-ta albo 6-ta, to jest ona cięższa, gdy zaś fałszywą jest moneta 10-ta, to jest ona lżejsza. Jasne, że ważenie (trzecie!) $((5)) \sim ((6))$ wystarczy do rozpoznania sytuacji.

Podprzypadek (2c): $((5, 6, 9)) < ((7, 8, 10))$. Wtedy monety 5-ta, 6-ta i 10-ta są prawdziwe, a fałszywą jest moneta 7-ma albo 8-ma albo 9-ta. Przy czym, jeżeli fałszywą jest moneta 7-ma albo 8-ta, to jest ona cięższa, gdy zaś fałszywą jest moneta 9-ta, to jest ona lżejsza. Jasne, że ważenie (trzecie!) $((7)) \sim ((8))$ wystarczy do rozpoznania sytuacji.

U w a g a. Gdy mamy 13 monet z jedną fałszywą to t r z y ważenia wystarczą do wskazania „fałszywki”, jednak (na ogół) nie da się stwierdzić czy jest ona lżejsza czy cięższa. Czytelnik może zechcieć sprawdzić, że wystarczy wykonać ważenia-porównania:

1^0: $((1, 2, 3, 4)) \sim ((5, 6, 7, 8))$,
2^0: $((2, 4, 7, 9)) \sim ((1, 6, 10, 11))$,
3^0: $((3, 7, 8, 11)) \sim ((2, 6, 10, 12))$.

Zauważmy, że w tych ważeniach nie uczestniczy moneta 13-ta (dlatego, gdyby to ona była fałszywą, nie moglibyśmy – w tych trzech ważeniach – rozpoznać czy jest ona lżejsza czy cięższa).

Z0.B3 Dzielimy zbiór na dwie grupy po 729 monet i jedną mającą 558 monet. Porównujemy (kładąc na szalkach wagi) grupy 729-elementowe. Wówczas natychmiast możemy wskazać grupę zawierającą monetę fałszywą (jak?). W ten sposób zadanie redukuje się do zadania wskazania (za pomocą sześciu ważeń-porównań) monety fałszywej w zbiorze 729 monet z jedną lżejszą monetą (dodajemy 171 monety prawdziwe do grupy 558-elementowej, gdy to w tej grupie jest fałszywka). Dzieląc taki zbiór 729-elementowy na trzy podgrupy (podzbiory!) 243-elementowe i porównując dwie z tych grup, tak samo jak przed chwilą, za pomocą jednego ważenia, znajdziemy 243 monety z jedną fałszywą. I dysponujemy jeszcze pięcioma ważeniami! Itd. Jasne, że po sześciu opisanych operacjach znajdziemy trzy monety, wśród których będzie moneta fałszywa. Wskazanie jej za pomocą ostatniego, siódmego, ważenia jest natychmiastowe.

Uwaga. Za pomocą oczywistego uogólnienia pokazanego rozumowania można wykazać połowę tezy twierdzenia:

Twierdzenie. *Danych jest n monet, z których wszystkie, z wyjątkiem jednej, fałszywej, ważą tyle samo. Wiadomo, że fałszywa moneta jest lżejsza. Oznaczmy $k := 1 + \left\lfloor \log_3 \left(n - \frac{1}{2}\right)\right\rfloor$. Liczba k jest równa minimalnej liczbie porównań na wadze szalkowej, wystarczających do jednoznacznego wskazania monety fałszywej.*

Dla dowodu, że liczba k jest najmniejsza, zauważmy, że każde ważenie-porównanie polega na rozbiciu zbioru monet na trzy podzbiory, z których jeden odkładamy na bok, a dwa pozostałe „kładziemy" na dwóch szalkach wagi. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.

Z0.B4 Oznaczmy przez $w_1, w_2, \ldots, w_{101}$ wagi (w kilogramach) naszych krów i przez w sumę $\sum_{i=1}^{101} w_i$ ich wag. „Odkładając" na bok i-tą krowę, dostaniemy równość

$$w_{k_1} + w_{k_2} + \cdots + w_{k_{50}} = (w - w_i) - (w_{k_1} + w_{k_2} + \cdots + w_{k_{50}})$$

dla pewnego ciągu $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_{50} \leqslant 101$ liczb naturalnych (bez i). Z tej równości widzimy, że liczba $w - w_i$ jest parzysta dla każdego $1 \leqslant i \leqslant 101$. W szczególności widzimy, że wszystkie liczby w_i są tej samej parzystości.

Załóżmy teraz, że możliwy jest taki, spełniający narzucone warunki, rozkład wag naszych krów, że nie wszystkie krowy mają taką samą wagę. Wówczas (Zasada Minimum!) możemy założyć, że w jest najmniejsza. Rozpatrzymy dwa przypadki: (1) wszystkie liczby w_i są parzyste, (2) wszystkie liczby w_i są nieparzyste. W przypadku (1) rozważmy nowy zbiór („odchudzonych") krów o wagach $w'_i = \frac{1}{2} w_i$. Jasne, że one spełniają te same narzucone warunki co krowy o wagach w_i. Ponieważ ich sumaryczna waga $w' = \frac{1}{2} w$ jest mniejsza niż w, więc, na mocy założenia o minimalności w, mamy równości $w'_1 = w'_2 = \cdots = w'_{101}$, skąd $w_1 = w_2 = \cdots = w_{101}$. Sprzeczność. W przypadku (2) rozważmy nowy zbiór krów o wagach (naturalnych!) $w'_i = \frac{1}{2}(w_i + 1)$. Te krowy, jak łatwo widzieć, również spełniają narzucone warunki, a ich sumaryczna waga jest równa $w' = \frac{1}{2}(w + 101)$. Stąd, wobec założenia o minimalności, $w \leqslant \frac{1}{2}(w + 101)$, czyli $w \leqslant 101$, co jest możliwe tylko, gdy $w_1 = \cdots = w_{101} = 1$.

Chcemy rozwiązać zadanie ogólniejsze. Wykorzystamy przy tym technikę opozycji *parzysty-nieparzysty*, rozszerzając ją nieco: Liczbę wymierną nazwiemy **parzystą**, gdy licznik reprezentującego ją ułamka nieskracalnego jest liczbą parzystą. Liczby wymierne o nieparzystym mianowniku i liczniku nazwiemy **nieparzystymi**[8]. Podstawowe, wykorzystywane w dalszym ciągu, własności tych pojęć zbieramy w ćwiczeniu:

Ćwiczenie. Iloczyn liczby wymiernej parzystej przez liczbę wymierną o nieparzystym mianowniku jest liczbą wymierną parzystą, a suma liczby wymiernej parzystej i liczby wymiernej nieparzystej jest liczbą wymierną nieparzystą. Zauważyć też, że nieparzysta liczba wymierna jest różna od 0.

Po rozwiązaniu tego ćwiczenia możemy rozwiązać zapowiedziane uogólnienie:

Zadanie. Danych $2k + 1$ krów ma następującą własność: Jeżeli odstawimy na bok dowolną z nich, to pozostałe $2k$ krów można podzielić na takie dwie podgrupy po k krów, że suma wag krów jednej grupy jest równa sumie wag krów drugiej grupy. Dowieść, że wagi wszystkich krów są równe.

[8] Czytelnik, który zapoznał się z ustępem $\mathbb{ATL}$ 2.4.1 wie, że liczba wymierna α jest parzysta, gdy $v_2(\alpha) > 0$, a jest nieparzysta, gdy $v_2(\alpha) = 0$. Oczywiście 0 jest liczbą wymierną parzystą (bo $v_2(0) = +\infty > 0$).

R o z w i ą z a n i e. Odrzucenie założenia $k = 50$ jest mało(!) ważne. Rozwiązanie takiego uogólnienia jest prostym uogólnieniem rozwiązania pokazanego. Ważne jest tu odrzucenie założenia o naturalności wag. Rozwiązanie takiego uogólnienia wymaga nowego pomysłu.

Rozważmy (kodujący zadanie o $2k + 1$ krowach) układ równań postaci:

$$\begin{cases} 0x_1 \pm \ x_2 \pm x_3 \pm \ \ldots \pm x_{2k} \pm x_{2k+1} = 0, \\ \pm x_1 + \ 0x_2 \pm x_3 \pm \ \ldots \pm x_{2k} \pm x_{2k+1} = 0, \\ \pm x_1 \pm \ x_2 + \ 0x_3 \pm \ \ldots \pm x_{2k} \pm x_{2k+1} = 0, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \pm x_1 \pm \ x_2 \pm x_3 \pm \ \ldots + \ 0x_{2k} \pm x_{2k+1} = 0, \\ \pm x_1 \pm \ x_2 \pm x_3 \pm \ \ldots \pm x_{2k} + \ 0x_{2k+1} = 0. \end{cases} \tag{0.3}$$

W każdym wierszu mamy tu dokładnie k *plusów* i tyleż *minusów*, ponadto w i-tym wierszu współczynnik przy x_i jest równy 0. Dążymy do udowodnienia, że (niezależnie od rozmieszczenia znaków $\pm$) *każde rozwiązanie układu* (0.3) *jest rozwiązaniem oczywistym* $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$ (mamy tu $2k + 1$ wyrazów równych α, przy dowolnym α). Jasne, że to zakończy rozwiązanie!

Dodajmy ostatni wiersz kolejno do każdego z pozostałych wierszy. Dostaniemy wówczas układ równoważny (mający te same rozwiązania) postaci

$$\begin{cases} Nx_1 + Px_2 + Px_3 + \cdots + Px_{2k} + Nx_{2k+1} = 0, \\ Px_1 + Nx_2 + Px_3 + \cdots + Px_{2k} + Nx_{2k+1} = 0, \\ Px_1 + Px_2 + Nx_3 + \cdots + Px_{2k} + Nx_{2k+1} = 0, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ Px_1 + Px_2 + Px_3 + \cdots + Nx_{2k} + Nx_{2k+1} = 0, \\ \pm x_1 \pm \ x_2 \pm x_3 \pm \cdots \pm x_{2k} + \ 0x_{2k+1} = 0, \end{cases}$$

gdzie w miejscach oznaczonych przez P stoi liczba p a r z y s t a (tu -2, 0 lub $+2$), a w miejscach oznaczonych przez N, liczba n i e p a r z y s t a (tu -1 lub $+1$). Bardzo w a ż n e jest, że $N \neq 0$. Zapiszemy wszystkie, z wyjątkiem ostatniego, równania w postaci:

$$\begin{cases} Nx_1 + Px_2 + Px_3 + \cdots + Px_{2k} = Nx_{2k+1}, \\ Px_1 + Nx_2 + Px_3 + \cdots + Px_{2k} = Nx_{2k+1}, \\ Px_1 + Px_2 + Nx_3 + \cdots + Px_{2k} = Nx_{2k+1}, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ Px_1 + Px_2 + Px_3 + \cdots + Nx_{2k} = Nx_{2k+1}. \end{cases} \tag{0.4}$$

Uprościmy ten układ za pomocą standardowej techniki **sprowadzania do postaci trójkątnej**. Robi się to tak: Pomnóżmy pierwsze równanie przez liczbę a i dodajmy do drugiego równania, które po tej operacji uzyska postać

$$(aN + P)x_1 + (aP + N)x_2 + (aP + P)x_3 + \cdots + (aP + P)x_{2k} = (aN + N)x_{2k+1}.$$

Jasne, że istnieje dokładnie jedna taka p a r z y s t a liczba całkowita a, że współczynnik postaci $aN + P$ przy x_1 w tym wyrażeniu jest równy 0. W ó w c z a s współczynnik $aP + N$ przy x_2 jest n i e p a r z y s t ą liczbą całkowitą, współczynniki przy $x_3, \ldots, x_{2k}$ są parzystymi liczbami całkowitymi, a współczynnik przy x_{2k+1} (z prawej strony) jest nieparzystą liczbą całkowitą. Podobnie możemy „wyzerować” współczynnik przy x_1 w kolejnych wierszach układu (0.4). Po tych operacjach dostaniemy równoważny układ równań

$$\begin{cases} Nx_1 + Px_2 + Px_3 + \cdots + Px_{2k} = Nx_{2k+1}, \\ \qquad Nx_2 + Px_3 + \cdots + Px_{2k} = Nx_{2k+1}, \\ \qquad Px_2 + Nx_3 + \cdots + Px_{2k} = Nx_{2k+1}, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \qquad Px_2 + Px_3 + \cdots + Nx_{2k} = Nx_{2k+1}, \end{cases}$$

gdzie znaczek P oznacza liczbę parzystą, a znaczek N liczbę nieparzystą (w szczególności różną od 0). Teraz chcemy, podobnie jak przed chwilą, „wykasować" wszystkie wyrazy postaci Px_2 leżące pod wyrazem Nx_2 z drugiego wiersza. To się robi tak samo, jedyną różnicą jest to, że będziemy musieli używać liczb wymiernych. Jednakowoż opozycja *parzysty-nieparzysty* działa tak jak poprzednio. Czytelnik zechce się przekonać o tym samodzielnie. W ten sposób „kasujemy" kolejno wszystkie współczynniki parzyste leżące pod odpowiednimi wyrazami postaci Nx_i z i-tego wiersza. Po wykonaniu tego programu, dostaniemy układ (równoważny układowi (0.4)) postaci (tak zwanej **górno-trójkątnej**):

$$\begin{cases} Nx_1 + Px_2 + Px_3 + \cdots + Px_{2k} = Nx_{2k+1}, \\ \qquad Nx_2 + Px_3 + \cdots + Px_{2k} = Nx_{2k+1}, \\ \qquad\qquad Nx_3 + \cdots + Px_{2k} = Nx_{2k+1}, \\ \qquad\qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad Nx_{2k} = Nx_{2k+1}, \end{cases} \tag{0.5}$$

gdzie N oznacza liczbę wymierną nieparzystą (w szczególności różną od 0), a P oznacza liczbę wymierną parzystą. Otrzymana postać naszego układu pozwala uzasadnić następującą rozstrzygającą tezę:

T e z a. *Jeżeli* $(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1})$ *jest rozwiązaniem układu* (0.5) *i* $x_{2k+1} = \alpha$, *to zachodzą równości* $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2k} = \alpha$.

U z a s a d n i e n i e. Jeżeli $(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1})$ jest rozwiązaniem układu (0.5), to wszystkie x_i, dla $1 \leqslant i \leqslant 2k$, można sukcesywnie (od dołu do góry) j e d n o z n a c z n i e wyznaczyć za pomocą x_{2k+1}. Możliwość i jednoznaczność takiego wyznaczenia wynika z niezerowości współczynników N stojących przy x_i w i-tym wierszu. Wobec tego istnieje(!) jedyne(!) rozwiązanie układu (0.5), więc też układu (0.3), w którym $x_{2k+1} = \alpha$. Ale jedno takie rozwiązanie znamy od początku, mianowicie rozwiązanie $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$. Stąd $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2k} = \alpha$. Q.e.d.

Widzimy więc, że wszystkie krowy ważą tyle samo.

U w a g a. Czytelnik znający elementy **algebry liniowej** (= teorii skończenie-wymiarowych przestrzeni wektorowych nad dowolnymi ciałami), może znacznie skrócić rozumowanie:

Macierz układu (0.4) po r e d u k c j i modulo 2 jest macierzą jednostkową. To oznacza, że wyznacznik lewego górnego minora $2k \times 2k$ macierzy $\mathbf{A}$ układu (0.3) jest liczbą nieparzystą (więc r ó ż n ą od 0). W szczególności, $\operatorname{rz} \mathbf{A} \geqslant 2k$. Stąd, ponieważ $\operatorname{rz} \mathbf{A} + \dim(\ker \mathbf{A}) = 2k + 1$ i, oczywiście, $\dim(\ker \mathbf{A}) \geqslant 1$, mamy równość $\dim(\ker \mathbf{A}) = 1$.

Z0.B5 Załóżmy, że najmniejszą z liczb $g_1, \ldots, g_n$ jest liczba g_j. Ta liczba jest największą liczbą w j-tej kolumnie i stoi w którymś, dajmy na to w k-tym, wierszu naszej tablicy. Więc $g_j = a_{kj}$. Załóżmy też, że największą z liczb $l_1, \ldots, l_m$ jest liczba l_i. Jest ona najmniejszą liczbą w i-tym wierszu i stoi w którejś, dajmy na to w l-tej, kolumnie naszej tablicy. Więc $l_i = a_{il}$. Popatrzmy teraz na wyraz a_{ij}. Wówczas $\min\{g_1, \ldots, g_n\} = g_j = a_{kj} \geqslant a_{ij} \geqslant a_{il} = l_i = \max\{l_1, \ldots, l_m\}$. Nierówności wynikają stąd, że a_{kj} jest największe w j-tej kolumnie, a a_{il} jest najmniejsze w i-tym wierszu.

U w a g a. Udowodnioną ***nierówność mini-max*** zapisujemy w skrócie tak:

$$\boxed{\min_j \max_i a_{ij} \geqslant \max_i \min_j a_{ij}.}$$

Z0.B6 W pierwszym porównaniu porównajmy medianę b_{505} zbioru $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_{1009}\}$ z dolną medianą[9] a_{504} zbioru $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_{1008}\}$.

Załóżmy, że $a_{504} < b_{505}$. Wówczas liczba a_{503} jest mniejsza od wszystkich liczb należących do zbioru $\{a_{504}, \dots, a_{1008}\} \cup \{b_{505}, \dots, b_{1009}\}$. Ponieważ w tym zbiorze jest $505 + 505 = 1010$ liczb ze zbioru $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, więc jest jasne, że $a_{503} < m$, gdzie przez m oznaczyliśmy poszukiwaną medianę (zbioru $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$). Z drugiej strony, liczba b_{506} jest większa od wszystkich liczb należących do, mającego 1009 elementów, zbioru $\{a_1, \dots, a_{504}\} \cup \{b_1, \dots, b_{505}\}$, więc $m < b_{506}$.

Otrzymany wynik możemy wyobrazić na rysunku. Widzimy na nim medianę m, z lewej jej strony mamy 1008 liczb zbioru $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ mniejszych niż m, wśród nich liczba a_{503}; z prawej jej strony mamy 1008 liczb większych niż m, wśród nich liczba b_{506}. Jeżeli teraz wyrzucimy z lewej części liczby $a_1, a_2, \dots, a_{496}$, to zostanie tam 512 liczb mniejszych niż m. Podobnie, jeżeli wyrzucimy z prawej części liczby $b_{513}, b_{514}, \dots, b_{1009}$, to zostanie tam 511 liczb większych niż m. Oznaczmy

... a_{503} ... m ... b_{506} ...

$$\mathcal{A}' = \{a_{497}, a_{498}, \dots, a_{1008}\},\ \mathcal{B}' = \{b_1, b_2, \dots, b_{512}\}.$$

Każdy z tych zbiorów ma 512 elementów. Widzimy więc, że poszukiwana mediana m jest górną medianą zbioru $\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}'$, $m = m_G(\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}')$. Zbiór $\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}'$ ma 1024 elementy. Stosując poniższy lemat możemy (za pomocą 10 porównań) wyznaczyć jego górną medianę:

L e m a t. *Niech $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{2k}\}$, $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_{2k}\}$ będą rozłącznymi $2k$-elementowymi zbiorami liczb rzeczywistych. Załóżmy ponadto, że $c_1 < c_2 < \dots < c_{2k}$, $d_1 < d_2 < \dots < d_{2k}$ i że zbiór $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ ma $4k$ elementów (tzn., $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \varnothing$). Wówczas, jeżeli $c_{k+1} < d_{k+1}$, to*

$$m_G(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) = m_G(\{d_1, \dots, d_k\} \cup \{c_{k+1}, \dots, c_{2k}\}). \tag{0.6}$$

D o w ó d. Liczba c_k jest mniejsza od wszystkich liczb zbioru $\{c_{k+1}, \dots, c_{2k}\} \cup \{d_{k+1}, \dots, d_{2k}\}$, więc $c_k < m_G(\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$. Liczba d_{k+1} jest $>$ od wszystkich liczb zbioru $\{d_1, \dots, d_k\} \cup \{c_1, \dots, c_{k+1}\}$, więc $m_G(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) < d_{k+1}$. Odrzućmy teraz k liczb $c_1, \dots, c_k$ mniejszych niż $m_G(\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$ i k liczb $d_{k+1}, \dots, d_{2k}$ większych niż $m_G(\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$. Dostajemy równość (0.6). Q. e. d.

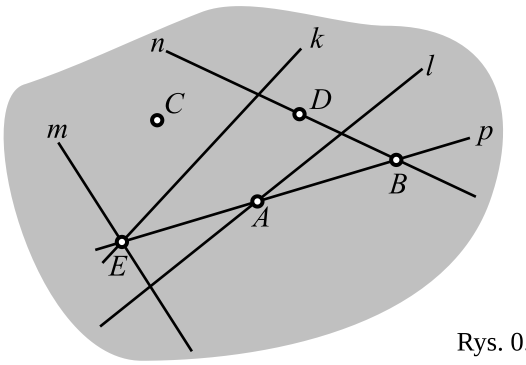
Z0.C1 Stosunki incydencji (= należenia[10] punktu do prostej) kodujemy w tablicy 5×5. Kolumny tej tablicy *numerujemy* punktami, a wiersze *numerujemy* prostymi. W polu na przecięciu a-tego wiersza i X-tej kolumny wpisujemy znak 1 gdy prosta a przechodzi przez punkt X, i wpisujemy znak 0 w przeciwnym przypadku. Na rysunku 0.C1a widzimy konfigurację pięciu prostych i pięciu punktów, i jej zakodowanie w tablicy.

Cztery pola takiej tablicy, których środki są wierzchołkami prostokąta i w których występuje cyfra c nazwijmy *c-prostokątem.* Używając tego języka, tezę naszego zadania można sformułować tak: *Istnieje 0-prostokąt.* Załóżmy więc, nie wprost, że 0-prostokątów n i e m a.

[9] Zbiór l i c z b mający parzystą liczbę elementów nie ma mediany. Ma za to **dolną medianę** i **górną medianę**: Jeżeli $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem skończonym i $|\mathcal{X}| = 2k$, to górna mediana zbioru $\mathcal{X}$, $m_G = m_G(\mathcal{X})$, jest jedyną liczbą zbioru $\mathcal{X}$, od której w zbiorze tym jest dokładnie k liczb mniejszych i dokładnie $k-1$ większych. Mediana dolna, $m_D = m_D(\mathcal{X})$, jest zaś jedyną taką liczbą zbioru $\mathcal{X}$, od której jest dokładnie k liczb większych i dokładnie $k-1$ mniejszych. Jasne, że $m_D < m_G$. Średnią arytmetyczną $\frac{1}{2}(m_D + m_G)$ nazywa się czasami medianą zbioru $\mathcal{X}$.

[10] W geometrii szkolnej (i olimpijskiej) mówi się tradycyjnie o *leżeniu punktu na prostej* lub, równoważnie, o *przechodzeniu prostej przez punkt.*

Zauważmy, że 1-prostokątów nie ma! Powód jest natury geometrycznej: 1-prostokąt koduje niemożliwą geometrycznie sytuację, w której dwie r ó ż n e proste przechodzą przez dwa różne punkty, zob. A1 w $\mathbb{PLA}$.



	A	B	C	D	E
k	0	0	0	0	1
l	1	0	0	0	0
m	0	0	0	0	1
n	0	1	0	1	0
p	1	1	0	0	1

Rys. 0.C1*a*

0	0	0	0	
1	1	1		
?	?	?		

0	0	0	1	1
			?	?
			?	?

1	1	1	1	
0	0	0		
?	?	?		

1	1	1	0	0
			?	?
			?	?

Rys. 0.C1*b*

Pokażemy najpierw, że *w żadnym wierszu nie stoją cztery cyfry* 0. Gdyby tak było, to (b.s.o., czyli ewentualnie przemianowując punkty i proste) możemy założyć, że punkty A, B, C, D nie leżą na prostej k, zob. lewą górną tablicę na rys. 0.C1*b*. Wówczas w drugim wierszu pod co najmniej trzema zerami (z pierwszego wiersza) stoją jedynki, a pod tymi trzema jedynkami, w trzecim wierszu stoją co najmniej dwa takie same znaki. Jasne, że wtedy znajdziemy albo 0-prostokąt (z górnym bokiem w pierwszym wierszu), albo 1-prostokąt (z górnym bokiem w drugim wierszu). Sprzeczność. Podobną sprzeczność dostaniemy, gdy w pewnym wierszu stoją cztery cyfry 1, czyli gdy pewna z danych prostych przechodzi przez cztery z danych punktów, zob. lewą dolną tablicę na rys. 0.C1*b*.

Pozostało nam jeszcze znalezienie sprzeczności w przypadku, gdy każdy wiersz jest typu $(3, 2)$ (tzn., występują w nim trzy cyfry 0 i dwie cyfry 1) lub typu $(2, 3)$. Ponieważ wierszy jest pięć, więc jest jasne, że wówczas co najmniej trzy wiersze są tego samego typu. Jeżeli mamy trzy wiersze typu $(3, 2)$, to (ewentualnie przemianowując proste) możemy uznać, że są to trzy górne wiersze. Ponadto, ewentualnie przemianowując punkty, możemy uznać, że pierwszy wiersz ma postać $(0, 0, 0, 1, 1)$, zobacz prawą górną tablicę z rys. 0.C1*b*. Gdzie wtedy mogą stać cyfry 0 z drugiego wiersza? Jeżeli dwie z nich stoją na pierwszych trzech miejscach, to mamy 0-prostokąt. Załóżmy więc, że jest tam tylko jedno 0, a pozostałe dwa stoją w miejscu znaków zapytania. Przeprowadzając to samo rozumowanie w odniesieniu do trzeciego wiersza, mamy to co chcemy. Wyobrażony w prawej dolnej tablicy na rysunku 0.C1*b* przypadek istnienia trzech wierszy typu $(2, 3)$, rozpatrujemy analogicznie. (Ponieważ, przy naszym założeniu nie wprost, cyfry 0 i 1 grają dokładnie tę samą rolę, więc naprawdę już to zrobiliśmy!)

U w a g a. W dalszym ciągu jeszcze nie raz będziemy używać tablic o wyrazach 0, 1 dla kodowania stosunków incydencji (czy należenia). Nobilitujemy je, przydając im nazwę **macierzy binarnych**.

Z0.C2 Zaczniemy od przyswojenia sobie ważnego pojęcia. Z $\mathbb{PLA}$ D2.6 wiemy co to jest zbiór wypukły[11]. (Koniecznie) rozwiążmy ćwiczenie:

Ć w i c z e n i e. Udowodnić, że część wspólna (= przekrój) dowolnej rodziny zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym (być może pustym).

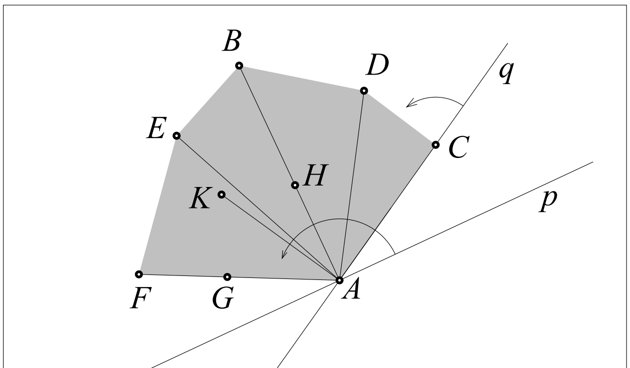
D e f i n i c j a. Część wspólna w s z y s t k i c h zbiorów wypukłych zawierających dany podzbiór płaszczyzny[12] X nazywa się **otoczką wypukłą** zbioru X i oznacza symbolem $\operatorname{conv}(X)$.

Z definicji tej wynika, że otoczka wypukła danego zbioru niepustego $\mathcal{X}$ jest najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym $\mathcal{X}$ (jako podzbiór). Gdy $\mathcal{X}$ jest zbiorem skończonym możemy wyobrazić

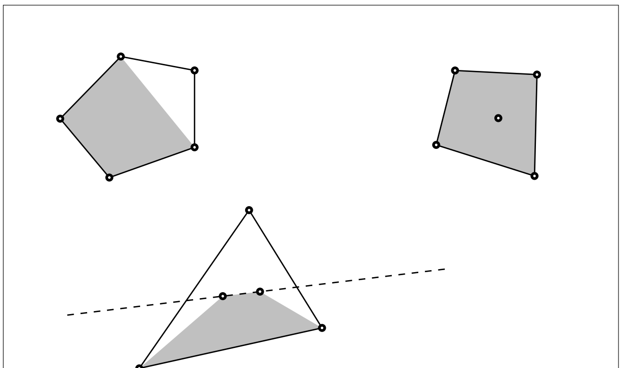
[11]Zbiór $\mathcal{C}$ nazywamy **zbiorem wypukłym**, gdy dla dowolnych punktów A, B należących do $\mathcal{C}$, odcinek $\overline{AB}$ jest podzbiorem zbioru $\mathcal{C}$.

[12]Lub przestrzeni, lub takiej struktury matematycznej, w której ma sens pojęcie odcinka, zob. ustęp 2.3.5.

sobie zbiór $\operatorname{conv}(\mathcal{X})$ następująco: Najpierw znajdujemy największą odległość między punktami zbioru $\mathcal{X}$. Powiedzmy, że wynosi ona d i realizuje się na parze (A, B), zob. rys. 0.C2*a*. Prowadzimy przez punkt A prostą p prostopadłą do AB. Każdy punkt zbioru $\mathcal{X}$ leży w tej samej półpłaszczyźnie o krawędzi p, co punkt B (odległość każdego punktu z półpłaszczyzny dopełniającej od punktu B jest bowiem $> d$). Prowadzimy teraz wszystkie półproste o początku A przechodzące przez pozostałe punkty zbioru $\mathcal{X}$ i wyznaczamy kąty jakie tworzą one z prostą p (przy ustalonej dowolnej orientacji). Bierzemy najmniejszy z tych kątów (powiedzmy, że realizuje go półprosta h_{AC}) i widzimy, że cały zbiór $\mathcal{X}$ leży w jednej (tej samej co punkt B) półpłaszczyźnie o krawędzi $q = AC$. Teraz możemy podobnie „wykryć" punkt $D \in \mathcal{X}$ i kolejne wierzchołki pewnego wielokąta. Prosta wyznaczona przez każdy bok tego wielokąta jest krawędzią półpłaszczyzny, w której zawarty jest cały zbiór $\mathcal{X}$. Ponieważ każda półpłaszczyzna jest zbiorem wypukłym (zob. $\mathbb{PLA}$ A6), więc przekrój powiedzianych półpłaszczyzn jest wielokątem wypukłym.



Rys. 0.C2*a*



Rys. 0.C2*b*

[Pokazane rozumowanie jest tylko trochę mniej nieścisłe od następującej heurezy: Wbijamy szpilki w punktach zbioru $\mathcal{X}$ i „puszczamy" otaczającą te szpilki gumę (od majtek). Jeżeli guma jest dostatecznie sprężysta, to utworzy wielokąt.] Proponujemy Czytelnikowi dokończenie dowodu poniższego twierdzenia:

T w i e r d z e n i e. *Jeżeli $\mathcal{X}$ jest skończonym podzbiorem płaszczyzny, to* $\operatorname{conv}(\mathcal{X})$ *jest wielokątem (wypukłym) o wierzchołkach w (niekoniecznie wszystkich) punktach zbioru $\mathcal{X}$.*

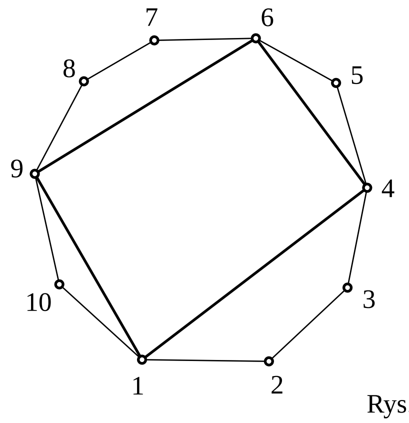
Przechodzimy do rozwiązania zadania: Mamy pięciopunktowy podzbiór płaszczyzny. Niech $\mathcal{W}$ będzie jego otoczką wypukłą. Z powyższego wiemy, że $\mathcal{W}$ jest wielokątem wypukłym o wierzchołkach w punktach z danego zbioru. Wobec tego $\mathcal{W}$ jest pięciokątem, czworokątem lub trójkątem (nie może być „dwukątem"(?), ani „jednokątem"(??), bo, z założenia, żadne trzy punkty ze zbioru $\mathcal{X}$ nie leżą na jednej prostej), zob. rys. 0.C2*b*. W pierwszych dwóch przypadkach natychmiast widzimy cztery wierzchołki czworokąta wypukłego. W przypadku trzecim, dwa z pięciu rozważanych punktów leżą wewnątrz trójkąta o wierzchołkach w trzech pozostałych punktach. Żaden z tych dwóch punktów nie leży na brzegu trójkąta (bo żadne trzy punkty nie są współliniowe) i prosta wyznaczona przez te dwa punkty nie przechodzi przez wierzchołek trójkąta (z tego samego powodu). Prosta ta przecina więc dwa boki trójkąta. Jasne, że te dwa punkty i końce boku rozłącznego z tą prostą tworzą wierzchołki czworokąta wypukłego.

Z0.C3 Niech $A_1A_2 \ldots A_{10}$ będzie badanym dziesięciokątem (wierzchołki numerujemy kolejno na przykład przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Czworokąty o wierzchołkach A_i będziemy dla skrótu zapisywali wypisując kolejne numery wierzchołków. Na przykład, pokazany na rysunku 0.C3 czworokąt zapisujemy na jeden z c z t e r e c h sposobów: $(1, 4, 6, 9)$, albo $(4, 6, 9, 1)$, albo $(6, 9, 1, 4)$, albo $(9, 1, 4, 6)$. Zobaczymy najpierw ile jest ciągów (kodujących czworokąty przekątniowe) postaci $(1, i, j, k)$. Aby taki ciąg kodował czworokąt p r z e k ą t n i o w y potrzeba i wystarcza oczywiście, by spełnione były warunki:

$$i \geqslant 3, \quad j \geqslant i+2, \quad k \geqslant j+2 \quad \text{oraz} \quad k \leqslant 9. \tag{0.7}$$

Ile jest ciągów $(1, i, j, k)$ spełniających te warunki? Dla odpowiedzi na to pytanie, każdemu takiemu ciągowi przyporządkujmy ciąg $(i', j', k') = (i-2, j-3, k-4)$. Ciąg (i', j', k') spełnia, oczywiście, warunki $1 \leqslant i' < j' < k' \leqslant 5$. Odwrotnie, takiemu ciągowi (i', j', k') odpowiada dokładnie jeden ciąg $(1, i'+2, j'+3, k'+4)$ spełniający warunki (0.7) (taka, wzajemnie-jednoznaczna, odpowiedniość nazywa się **bijekcją**). Wypisujemy ciągi (i', j', k') i, odpowiadające im, ciągi $(1, i, j, k)$:

$$\begin{array}{ccc}
(1,2,3) & \longleftrightarrow & (1,3,5,7)\\
(1,2,4) & \longleftrightarrow & (1,3,5,8)\\
(1,2,5) & \longleftrightarrow & (1,3,5,9)\\
(1,3,4) & \longleftrightarrow & (1,3,6,8)\\
(1,3,5) & \longleftrightarrow & (1,3,6,9)\\
(1,4,5) & \longleftrightarrow & (1,3,7,9)\\
(2,3,4) & \longleftrightarrow & (1,4,6,8)\\
(2,3,5) & \longleftrightarrow & (1,4,6,9)\\
(2,4,5) & \longleftrightarrow & (1,4,7,9)\\
(3,4,5) & \longleftrightarrow & (1,5,7,9)
\end{array}$$



Rys. 0.C3

Ponieważ ciągów (i', j', k') spełniających warunki $1 \leqslant i' < j' < k' \leqslant 5$ jest dokładnie tyle samo, co 3-elementowych podzbiorów $\{i', j', k'\}$ zbioru $[5] := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a takich podzbiorów jest 10, więc ciągów $(1, i, j, k)$ spełniających warunki (0.7) jest również 10.

Możemy teraz powtórzyć powyższe rozumowanie dla wierzchołka A_2 jako wierzchołka *wiodącego*. Najłatwiej to zrobić, dodając 1 do każdego wyrazu dziesięciu wypisanych ciągów $(1, i, j, k)$. Dostaniemy w ten sposób dziesięć kodów czworokątów przekątniowych z wierzchołkiem wiodącym A_2. Następnie, dodając podobnie 2, dostaniemy kody czworokątów przekątniowych o wiodącym wierzchołku A_3 (tu należy pamiętać, że wyrazy zapisujemy modulo 10, tzn., piszemy 1 zamiast 11, itp.). Postępując tak dalej, dostaniemy tablicę składającą się ze stu ciągów kodujących wszystkie czworokąty przekątniowe. W tablicy tej, jak to zauważyliśmy wyżej, każdy czworokąt odnajdujemy dokładnie cztery razy. To daje odpowiedź: Istnieje dokładnie 25 czworokątów przekątniowych.

Uwaga 1. Czytelnik powinien, po ewentualnym zapoznaniu się z materiałem ustępu 1.4.2, uogólnić pokazane rozumowanie dla dowodu takiego faktu:

Fakt. *Dany jest n-kąt wypukły $\mathcal{W}$ i liczba naturalna $k \geqslant 4$. Wówczas istnieje dokładnie*

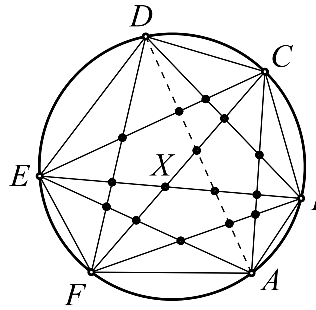
$$\frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1}$$

k-kątów przekątniowych wielokąta $\mathcal{W}$.

Uwaga 2. Czytelnik może też zapoznać się z Z1.13 i porównać otrzymaną teraz odpowiedź z odpowiedzią tam pokazaną.

Z0.C4 Oto pytanie ogólniejsze: Na ile części dzieli koło rodzina wszystkich cięciw o końcach w danych n punktach leżących na okręgu tego koła, jeżeli żadne trzy z tych cięciw nie przecinają się w jednym punkcie wewnętrznym?

Popatrzmy najpierw na przypadek szczególny. Na rysunku obok mamy $n = 6$ i możemy doliczyć się 31 obszarów. Podobna próba dla $n = 10$ jest trudna do przeprowadzenia. Lepiej więc przeprowadzić rozumowanie typu indukcyjnego: Zauważmy, że jeżeli mamy już pewną liczbę cięciw, to kolejna cięciwa (taka jak $\overline{AD}$ na rysunku) przechodzi przez $k+1$ już istniejących obszarów, dzieląc każdy z nich na dwie części. Tu $k \geqslant 0$ oznacza liczbę przecięć nowej cięciwy z już istniejącymi. Podkreślmy, że to jest prawda również dla $k=0$ (zobacz na przykład cięciwę $\overline{BC}$). W ten sposób dowodzimy, że liczba O_n obszarów, na jakie dzielą nasze cięciwy nasze koło jest równa $1+c_n+p_n$, gdzie przez c_n oznaczamy liczbę wszystkich cięciw (albowiem tyle właśnie jest składników równych 1, gdy dodajemy liczby $k+1$ dla wszystkich cięciw), a przez p_n oznaczamy liczbę wszystkich wewnętrznych punktów przecięcia cięciw.



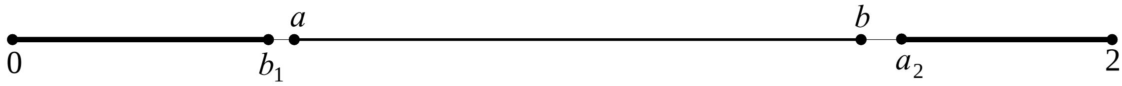
Rys. 0.C4

Wyznaczenie liczby c_n jest łatwe: Z każdego (z danych n) punktu wychodzi $n-1$ cięciw. Więc liczba wszystkich „wyjść” jest równa $n(n-1)$. Stąd widzimy, że $c_n = \frac{1}{2}n(n-1)$ (bo każda cięciwa ma d w a końce i każdy koniec jest „wyjściem”). Trudniej wyznaczyć liczbę p_n. Aby to zrobić zauważmy, że k a ż d e cztery z zadanych punktów wyznaczają czworokąt wypukły, a punkt przecięcia jego przekątnych jednym z p_n punktów, o które nam chodzi (na przykład punkt X z rysunku jest punktem przecięcia przekątnych czworokąta $BCEF$). Wystarczy więc wyznaczyć liczbę czwórek punktów (z zadanych n punktów). Rozumujemy tak: Oznaczmy nasze punkty $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ciąg $(A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{i_4})$ o czterech r ó ż n y c h wyrazach można wybrać na $n(n-1)(n-2)(n-3)$ sposobów (A_{i_1} można wybrać na n sposobów, A_{i_2} na $n-1$ sposobów, A_{i_3} na $n-2$ sposoby, i A_{i_4} na $n-3$ sposoby). Każdy czterowyrazowy ciąg o wyrazach różnych można uporządkować na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sposobów (mamy 4 punkty do wyboru na „lidera”, 3 punkty do wyboru na drugie miejsce, 2 punkty do wyboru na trzecie miejsce i 1 punkt do wyboru na miejsce czwarte). Wobec tego $p_n = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$.

U w a g a. Uzyskaliśmy i zapisaliśmy odpowiedź w języku gimnazjalisty. W ustępie 1.4.2 zapisalibyśmy o d p o w i e d ź w postaci $O_n = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$.

Z0.C5 Utożsamiamy odcinki z przedziałami $[\,a;\, b\,] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$. Mamy więc przedział $[\,0;\, 2\,]$ i cztery *przedzialiki* $[\,a_1;\, b_1\,], [\,a_2;\, b_2\,], [\,a_3;\, b_3\,], [\,a_4;\, b_4\,]$ pokrywające przedział $[\,0;\, 2\,]$. B.s.o. możemy zakładać, że są one podprzedziałami przedziału $[\,0;\, 2\,]$, czyli że $0 \leqslant a_i < b_i \leqslant 2$ dla wszystkich i. Zakładamy też, że długości $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, $b_3 - a_3$ i $b_4 - a_4$ tych przedziałów są mniejsze niż 1 (w przypadku przeciwnym wybieramy jeden z nich, długości $\geqslant 1$, odrzucamy trzy pozostałe i mamy to co chcemy!).

Ponieważ liczba 0 jest pokryta, więc co najmniej jedna liczba a_1, a_2, a_3, a_4 jest $= 0$. Niech (b.s.o.) $a_1 = 0$. Również liczba 2 jest pokryta, więc co najmniej jedna liczba b_2, b_3, b_4 jest $= 2$. Niech (b.s.o.) $b_2 = 2$. Wtedy przedziały $[\,a_1;\, b_1\,]$ i $[\,a_2;\, b_2\,]$ są rozłączne. Jeżeli suma ich długości jest $\geqslant 1$, to odrzucając pozostałe dwa, mamy to co chcemy. Pozostał nam do rozważenia przypadek, gdy przedział $[\,b_1;\, a_2\,]$ ma długość większą niż 1. Wybierzmy takie



liczby a i b, że $b_1 < a < b < a_2$ oraz $b - a = 1$. Wówczas liczba a jest pokryta przez co najmniej jeden z przedziałów $[\,a_3;\, b_3\,], [\,a_4;\, b_4\,]$. B.s.o., załóżmy, że $a \in [\,a_3;\, b_3\,]$. Nie może być $b \in [\,a_3;\, b_3\,]$ (bo wtedy byłoby $b_3 - a_3 \geqslant b - a = 1$, wbrew założeniu). Więc $b \in [\,a_4;\, b_4\,]$. Również $a \notin [\,a_4;\, b_4\,]$. Stąd wynika, że punkty przedziału $[\,b_1;\, a\,]$ są pokryte przez przedział $[\,a_3;\, b_3\,]$, a punkty przedziału $[\,b;\, a_2\,]$ pokryte są przez przedział $[\,a_4;\, b_4\,]$. Ponadto, przedziały $[\,a_1;\, b_1\,]$ i $[\,a_4;\, b_4\,]$ są r o z ł ą c z n e i przedziały $[\,a_3;\, b_3\,]$ i $[\,a_2;\, b_2\,]$ również są r o z ł ą c z n e. Zadanie będzie rozwiązane, gdy sprawdzimy, że suma długości dwóch pierwszych lub suma długości dwóch drugich jest $\geqslant 1$. Mamy więc udowodnić zachodzenie co najmniej jednej z nierówności $b_1 - a_1 + b_4 - a_4 \geqslant 1$, $b_3 - a_3 + b_2 - a_2 \geqslant 1$. To jest jasne, bo w przeciwnym przypadku mielibyśmy $b_1 - a_1 + b_4 - a_4 < 1$ i $b_3 - a_3 + b_2 - a_2 < 1$, co, po dodaniu, dałoby $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + (b_3 - a_3) + (b_4 - a_4) < 2$, a taka nierówność oznaczałaby, że suma długości odcinków pokrywających przedział długości 2 jest mniejsza niż 2. Co jest absurdem.

To zadanie jest poziomu gimnazjalnego. Można je podnieść do poziomu olimpijskiego:

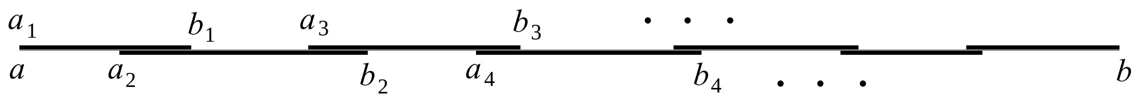
Zadanie. Pewna rodzina podprzedziałów przedziału $[a; b]$ pokrywa ten przedział. Udowodnić, że można z niej wybrać taką podrodzinę, że wchodzące w jej skład przedziały są parami rozłączne, a suma ich długości jest $\geqslant \frac{1}{2}(b - a)$.

Rozwiązanie. Najpierw udowodnimy lemat:

Lemat. *Jeżeli pewna skończona rodzina podprzedziałów pokrywa przedział $[a; b]$, to można z niej wybrać taką podrodzinę, która również pokrywa przedział $[a; b]$ i przy tym taką, że każdy punkt przedziału $[a; b]$ należy do co najwyżej dwóch przedziałów tej podrodziny.*

Dowód. Załóżmy, że $\mathscr{R}$ jest rodziną **pokrywającą** podprzedziałów przedziału $[a; b]$. Wybierzmy taką podrodzinę $\mathscr{R}' = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\} \subseteq \mathscr{R}$, która jest rodziną pokrywającą i ma najmniej elementów[13]. Twierdzimy, że rodzina $\mathscr{R}'$ ma pożądaną własność (tzn., że każda liczba $\alpha \in [a; b]$ jest pokryta przez co najwyżej dwa przedziały podrodziny $\mathscr{R}'$). Załóżmy, nie wprost, że pewna liczba α jest pokryta przez trzy przedziały podrodziny $\mathscr{R}'$, na przykład (b.s.o.), przez $I_1 = [a_1; b_1]$, $I_2 = [a_2; b_2]$ i $I_3 = [a_3; b_3]$. To znaczy $\alpha \in I_1 \cap I_2 \cap I_3$. Jednocześnie, po wyrzuceniu przedziału I_1 z rodziny $\mathscr{R}'$ dostajemy rodzinę mniej liczną, więc nie będącą rodziną pokrywającą. To znaczy, że istnieje $u \in I_1$, ale $u \notin I_2 \cup I_3$. Podobnie, istnieje $v \in I_2$, ale $v \notin I_1 \cup I_3$, oraz $w \in I_3$, ale $w \notin I_1 \cup I_2$. B.s.o. możemy uważać, że $u < v < w$. W takiej sytuacji łatwo zobaczyć sprzeczność. Rzeczywiście, jeżeli $\alpha < v$, to, ponieważ $\alpha \in I_3$ i $w \in I_3$, czyli $a_3 \leqslant \alpha < v < w \leqslant b_3$, więc $v \in I_3$, co wykluczyliśmy. Jeżeli zaś $v \leqslant \alpha$, to, ponieważ $u \in I_1$ i $\alpha \in I_1$, czyli $a_1 \leqslant u < v \leqslant \alpha \leqslant b_1$, więc $v \in I_1$, co również wykluczyliśmy. Q.e.d.

Mając ten lemat, widzimy, że pewna podrodzina $\mathscr{R}'$ pokrywająca przedział $[a; b]$ wygląda tak:



To znaczy, że przedziały pokrywające $[a_i; b_i]$ można tak ponumerować, że

$$a = a_1 < a_2 \leqslant b_1 < a_3 \leqslant b_2 < a_4 \leqslant b_3 < \ldots.$$

Jasne, że wówczas przedziały „nieparzyste” $[a_1; b_1], [a_3; b_3], \ldots$ są parami rozłączne i przedziały „parzyste” $[a_2; b_2], [a_4; b_4], \ldots$ również są parami rozłączne. Łatwo, podobnie jak przed chwilą, uzasadnić, że zachodzi co najmniej jedna z nierówności

$$\textstyle\sum_{j \geqslant 1} (b_{2j-1} - a_{2j-1}) \geqslant \frac{1}{2}(b - a), \quad \sum_{j \geqslant 1} (b_{2j} - a_{2j}) \geqslant \frac{1}{2}(b - a).$$

Z0.C6 Wykorzystamy to miejsce do powiedzenia kilku słów o ważnych i mających liczne zastosowania twierdzeniach Helly'ego o zbiorach wypukłych. Tematyka ta należy do **geometrii kombinatorycznej** i (na razie) nie znalazła miejsca w skrypcie *zielonym.*

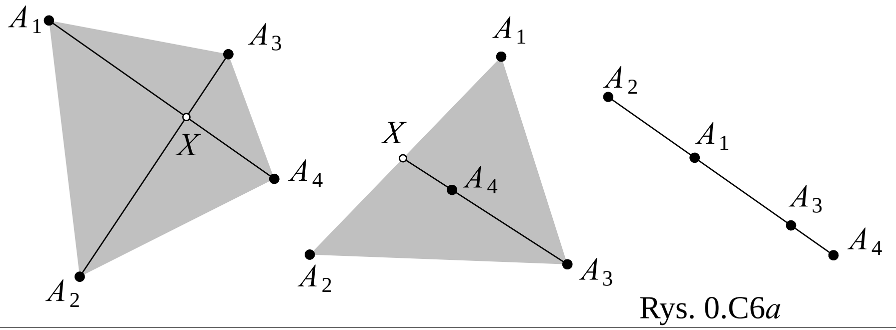
Lemat. (***Lemat Helly*'ego**) *Dane są takie cztery wypukłe podzbiory płaszczyzny, że każde trzy z nich mają punkt wspólny. Wówczas wszystkie cztery mają punkt wspólny.*

Dowód. Niech $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ będą takimi wypukłymi podzbiorami płaszczyzny, że niepuste są cztery przekroje: $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4$ i $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4$. Niech

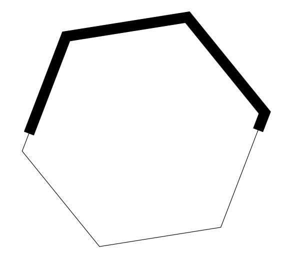
$$A_4 \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3, \quad A_3 \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_4, \quad A_2 \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4, \quad A_1 \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4$$

[13]Istnienie rodziny minimalnej $\mathscr{R}'$ wynika z Zasady Minimum: zbiór tych liczb naturalnych, które są liczbami elementów podrodzin (rodziny $\mathscr{R}$) pokrywających przedział $[a; b]$, jest niepusty (bo cała rodzina $\mathscr{R}$ jest pokrywająca i ma skończenie wiele elementów.

będą (dowolnie wybranymi) punktami z odpowiednich niepustych(!) zbiorów. Jeżeli któreś dwa z punktów A_i się pokrywają, na przykład, jeżeli $A_1 = A_3$, to $A_1 \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4$, więc A_1 jest punktem wspólnym wszystkich czterech zbiorów $\mathcal{C}_i$. Załóżmy więc, że zbiór $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ ma cztery elementy i rozważmy otoczkę wypukłą tego zbioru. Wiemy z rozwiązania Z0.C2, że jest ona (1) czworokątem, (2) trójkątem, (3) „dwukątem” (czyli odcinkiem), zob. rys. 0.C6a.



Rys. 0.C6a


Rys. 0.C6b

Przypadek (1). Niech X będzie punktem przecięcia przekątnych c z w o r o k ą t a w y p u k ł e g o $\mathrm{conv}(\{A_1, A_2, A_3, A_4\})$. Wówczas (przy oznaczeniach z rysunku) $X \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$ (bo $A_1 \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$ i $A_4 \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$, więc cały odcinek $\overline{A_1A_4}$ jest zawarty w zbiorze wypukłym $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$) oraz $X \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_4$ (z analogicznych powodów). Zatem $X \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4$. Przypadek (2). Przy oznaczeniach z rysunku, $X \in \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4$, więc $\overline{XA_3} \subseteq \mathcal{C}_4$, skąd $A_4 \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4$. Przypadek (3). Każdy punkt odcinka $\overline{A_1A_3}$ należy, co Czytelnik z łatwością uzasadni, do wszystkich czterech zbiorów $\mathcal{C}_i$. Q.e.d.

T w i e r d z e n i e. (***Twierdzenie Helly*'ego**) *Jeżeli każde trzy z zadanych $n \geqslant 4$ wypukłych podzbiorów płaszczyzny mają punkt wspólny, to i wszystkie mają punkt wspólny.*

D o w ó d. Prowadzimy przez indukcję względem n. Bazę indukcji (przypadek $n = 4$) stanowi lemat Helly'ego. Musimy więc wykonać krok indukcyjny: Załóżmy, że $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{n+1}$ są takimi podzbiorami wypukłymi, że każde trzy mają punkt wspólny. Rozważmy n zbiorów wypukłych(!)

$$\mathcal{D}_1 := \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2,\ \mathcal{D}_2 := \mathcal{C}_3,\ \ldots,\ \mathcal{D}_n := \mathcal{C}_{n+1}.$$

Każdy przekrój $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}_k$ jest niepusty. Rzeczywiście, jeżeli $i, j, k > 1$, to $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}_k = \mathcal{C}_{i+1} \cap \mathcal{C}_{j+1} \cap \mathcal{C}_{k+1}$ i zbiór ten jest niepusty z założenia. Gdy zaś $i = 1$, to zachodzi oczywista równość zbiorów $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}_k = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_{j+1} \cap \mathcal{C}_{k+1}$. Więc $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}_k \neq \varnothing$ na mocy lematu Helly'ego. Ponieważ przekrój $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{C}_{n+1}$ jest równy przekrojowi $\mathcal{D}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{D}_n$, a ten, na mocy założenia indukcyjnego, jest niepusty, więc i $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{C}_{n+1} \neq \varnothing$. Q.e.d.

Półpłaszczyzna $\varPi$ jest podzbiorem punktów płaszczyzny $\varSigma$ leżących po jednej stronie danej (dowolnej) prostej zwanej **krawędzią półpłaszczyzny**. Jeżeli zaliczamy punkty krawędzi do półpłaszczyzny, to mówimy o **półpłaszczyźnie domkniętej**, jeżeli nie, to o **półpłaszczyźnie otwartej**. W naszym zadaniu mówimy o półpłaszczyznach domkniętych. Dla danej półpłaszczyzny $\varPi \subset \varSigma$ przez $\varPi^c$ oznaczamy **półpłaszczyznę dopełniającą** (jeżeli $\varPi$ jest domknięta, to $\varPi^c$ jest otwarta, i odwrotnie). Półpłaszczyzny (zarówno domknięte jak i otwarte) są wypukłymi podzbiorami płaszczyzny. To jest aksjomat geometrii elementarnej.

Związek między pokrywaniem płaszczyzny półpłaszczyznami a twierdzeniem Helly'ego wynika z następującej zasady:

Z a s a d a D u a l n o ś c i. *Półpłaszczyzny $\varPi_1, \ldots, \varPi_n$ pokrywają płaszczyznę wtedy i tylko wtedy, gdy półpłaszczyzny dopełniające $\varPi_1^c, \ldots, \varPi_n^c$ nie mają punktu wspólnego.*

U z a s a d n i e n i e. Dany punkt jest punktem wspólnym półpłaszczyzn dopełniających $\varPi_i^c$ wtedy i tylko wtedy, gdy n i e należy do żadnej półpłaszczyzny $\varPi_i$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy n i e jest pokryty przez półpłaszczyzny $\varPi_i$. [Porównaj tzw. prawa de Morgana w C1.3.] Q.e.d.

Rozwiązanie zadania jest teraz trywialne: Gdyby żadne trzy (z zadanych 2017) półpłaszczyzny nie pokrywały płaszczyzny, to każde trzy półpłaszczyzny dopełniające miałyby punkt wspólny. Więc (na mocy wypukłości półpłaszczyzn dopełniających i twierdzenia Helly'ego) wszystkie 2017 półpłaszczyzny dopełniające miałyby punkt wspólny, czyli dane w zadaniu półpłaszczyzny nie pokrywałyby płaszczyzny. Sprzeczność.

Uwaga 1. Zastosujemy twierdzenie Helly'ego w dowodzie twierdzenia o plamie na obrusie:

Twierdzenie. (***Twierdzenie Junga***) *Dany jest skończony podzbiór $\mathcal{X} \subseteq \Sigma$ płaszczyzny o średnicy*[14] *równej d. Wówczas*[15] *istnieje taki punkt A, że $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D}(A, \frac{d}{\sqrt{3}})$.*

Dowód. Oznaczmy $\varrho = d/\sqrt{3}$. Rozważmy koła $\mathcal{D}_i := \mathcal{D}(A_i, \varrho)$, gdzie A_i są wszystkimi punktami zbioru $\mathcal{X}$. Jeżeli wykażemy, że każde trzy z kół $\mathcal{D}_i$ mają punkt wspólny, to, wobec twierdzenia Helly'ego i wypukłości kół, znajdziemy punkt A wspólny dla wszystkich tych kół. Czyli, znajdziemy punkt A odległy od wszystkich punktów A_i o niewięcej niż ϱ. Czyli $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D}(A, \varrho)$. Dowód został sprowadzony do dowodu poniższego lematu z geometrii elementarnej:

Lemat. *Jeżeli wszystkie trzy boki trójkąta $\triangle ABC$ mają długości niewiększe niż d, to istnieje punkt X, którego odległości $|XA|$, $|XB|$, $|XC|$ od wierzchołków trójkąta są niewiększe niż $\varrho = \frac{d}{\sqrt{3}}$.*

Dowód. Gdy $\triangle ABC$ jest rozwartokątny lub prostokątny, to wystarczy za X przyjąć środek najdłuższego boku. Sprawdźcie. Gdy zaś $\triangle ABC$ jest ostrokątny, to wystarczy za X przyjąć środek O okręgu opisanego. Rzeczywiście, ponieważ co najmniej jeden kąt trójkąta, na przykład α, spełnia nierówności $60^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$, więc, na mocy twierdzenia sinusów,

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} \leqslant \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}} \leqslant \frac{d}{\sqrt{3}},$$

gdzie, jak zwykle, przez R oznaczamy promień okręgu opisanego na trójkącie. Q.e.d. i Q.e.d.

Proponujemy dwa ćwiczenia na zastosowanie twierdzenia Helly'ego:

Ćwiczenie. Dany jest sześciokąt foremny o boku długości 1. *Robakiem* nazwiemy łamaną długości 3 taką jak na rysunku 0.C6b. Udowodnić, że jeżeli robaki $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_{2017}$ pokrywają brzeg sześciokąta, to pewne trzy z nich też to „robią".

Ćwiczenie. Dany jest wielokąt $\mathcal{W}$ (niekoniecznie wypukły). Mówimy, że punkt $X \in \mathcal{W}$ *widać* z punktu $A \in \mathcal{W}$, gdy cały odcinek $\overline{AX}$ jest zawarty w $\mathcal{W}$. Załóżmy, że dla dowolnych punktów $X, Y, Z \in \mathcal{W}$ istnieje punkt $A \in \mathcal{W}$, z którego widać wszystkie trzy punkty X, Y, Z. Udowodnić, że istnieje punkt, z którego widać wszystkie punkty zbioru $\mathcal{W}$.

Uwaga 2. Lemat i twierdzenie Helly'ego mają wersje jednowymiarowe:

Lemat. (***Lemat Helly'ego, wersja jednowymiarowa***), *Dane są takie trzy przedziały (tzn., odcinki leżące na pewnej prostej), że każde dwa z nich mają niepusty przekrój. Wówczas wszystkie trzy mają niepusty przekrój.*

Dowód. Załóżmy, że $c_3 \in [\,a_1; b_1\,] \cap [\,a_2; b_2\,]$, $c_2 \in [\,a_1; b_1\,] \cap [\,a_3; b_3\,]$ i $c_1 \in [\,a_2; b_2\,] \cap [\,a_3; b_3\,]$. Załóżmy (b.s.o.), że $c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3$. Wówczas, z łatwością sprawdzamy, że c_2 należy do wszystkich trzech przedziałów. Q.e.d

Twierdzenie. (***Twierdzenie Helly'ego, wersja jednowymiarowa***) *Jeżeli każde dwa z danych $n \geqslant 3$ przedziałów mają punkt wspólny, to wszystkie te przedziały mają punkt wspólny.*

Dowód przebiega według tego samego wzoru co wyżej.

Uwaga 3. Twierdzenie Helly'ego ma też wersję przestrzenną:

Twierdzenie. (***Twierdzenie Helly'ego, wersja trójwymiarowa***) *Jeśli każde cztery z danych $n \geqslant 5$ wypukłych podzbiorów przestrzeni mają punkt wspólny, to wszystkie te podzbiory mają punkt wspólny.*

[14]**Średnicą** podzbioru $\mathcal{X} \subseteq \Sigma$ nazywamy długość najdłuższego odcinka o końcach w punktach zbioru $\mathcal{X}$. Oznaczamy ją $\operatorname{diam}(\mathcal{X})$.

[15]Przez $\mathcal{D}(O, r)$ oznaczamy koło o środku O i promieniu r. Czyli $\mathcal{D}(O, r) := \{A \in \Sigma : |OA| \leqslant r\}$.

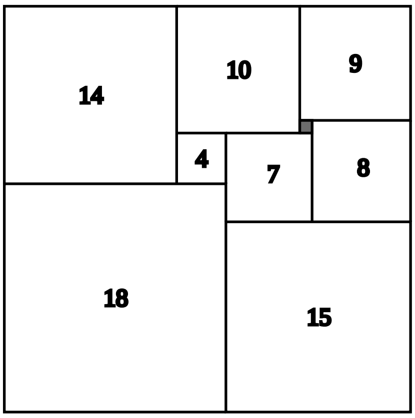
D o w ó d przebiega według tego samego wzoru co wyżej. Czytelnik zechce najpierw sformułować i udowodnić przestrzenną wersję l e m a t u Helly'ego. (Należy zauważyć, że otoczka wypukła zbioru 5-elementowego jest w zasadzie wielościanem.) Wykonanie kroku indukcyjnego jest tak samo proste jak w przypadku płaskim. Q.e.d.

Ć w i c z e n i e. Płaszczyzna przechodząca przez środek sfery dzieli tę sferę na trzy podzbiory: punktów leżących z jednej strony płaszczyzny, punktów leżących z drugiej strony i *równik*. Sumę jednego z tych zbiorów i równika nazywamy **półsferą**. Udowodnić, że z dowolnej 2017-elementowej rodziny półsfer pokrywających daną sferę można wybrać 4 półsfery pokrywające tę sferę.

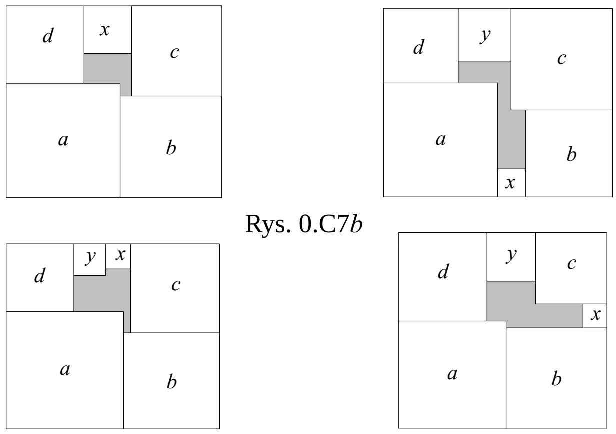
Ć w i c z e n i e. Dany jest 2017-elementowy podzbiór przestrzeni (trójwymiarowej). Załóżmy, że największa odległość między dwoma z tych punktów wynosi 1. Udowodnić, że istnieje kula o promieniu równym $\frac{\sqrt{33}}{8}$, w której zawiera się cały dany zbiór.

Z0.C7 Na rysunku 0.C7a widzimy, podany przez Z. Moronia, rozkład prostokąta o wymiarach 33×32 na 9 różnych kwadratów. Można wykazać, że nie istnieją rozkłady prostokątów na mniejszą liczbę różnych kwadratów. Dowód przebiega mniej więcej tak:

Załóżmy, że istnieją rozkłady prostokątów na mniejszą niż 9 liczbę (różnych!) kwadratów. Możemy wówczas (zob. Zasada Minimum) rozważyć rozkład z m i n i m a l n ą liczbą kwadratów.



Rys. 0.C7a



Rys. 0.C7b

W takim rozkładzie żaden kwadrat nie może zawierać dwóch sąsiednich wierzchołków prostokąta (po odrzuceniu takiego kwadratu dostalibyśmy prostokąt dopuszczający rozkład na mniejszą o 1 liczbę kwadratów). Widzimy więc, że każdy rozkład minimalny zawiera cztery *narożne* kwadraty (do każdego z nich należy jeden wierzchołek prostokąta). Na rysunku 0.C7b oznaczamy przez a, b, c, d długości boków tych kwadratów narożnych. Łatwo widzieć, że te cztery kwadraty nie mogą stanowić rozkładu. Byłoby wtedy $a + b = c + d$ i $a + d = b + c$, skąd $b = d$ i $a = c$, co jest niemożliwe.

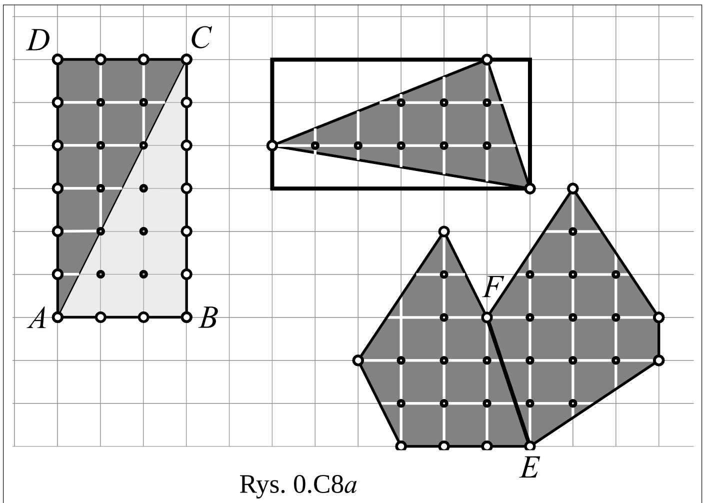
To oznacza, że oprócz czterech kwadratów narożnych musi być jeszcze co najmniej jeden kwadrat *brzegowy* (nie narożny, ale mający bok leżący na boku rozkładanego). Jeżeli jest tylko jeden taki kwadrat brzegowy, to w środku prostokąta znajdziemy wielokąt L-*kształtny* (zobacz lewą górną część rysunku 0.C7b). Czytelnik zechce udowodnić, że *takiego wielokąta nie da się złożyć z trzech różnych kwadratów*. Podobnie można uzasadnić, że jeżeli są dwa kwadraty brzegowe przy tym samym boku lub przy przeciwległych bokach prostokąta, to pozostałego (w środku) wielokąta nie da się złożyć z dwóch różnych kwadratów (zob. rys. 0.C7b – lewy dolny i prawy górny). Przypadek, gdy dwa kwadraty brzegowe znajdują się przy sąsiednich bokach prostokąta, jest (zob. przykład Z. Moronia) możliwy.

Ć w i c z e n i e. Złożyć prostokąt z kwadratów o bokach długości $2, 5, 7, 9, 16, 25, 28, 33, 36$.

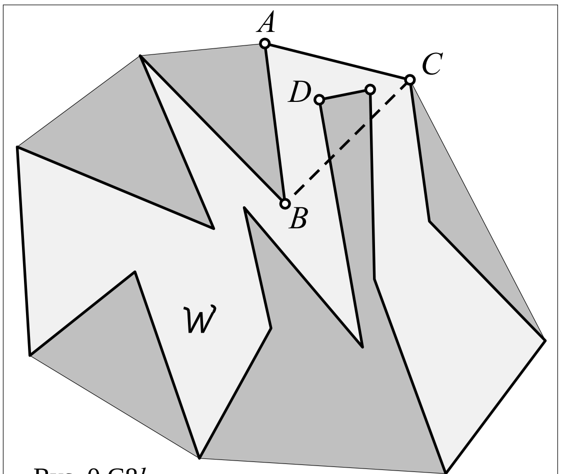
U w a g a. Więcej o takich rozkładach można przeczytać w *Okruchach Matematyki* J. Górnickiego.

Z0.C8 Wzoru Picka dowodzimy przez indukcję względem stopnia „skomplikowania” wielokąta.

(1) Zaczynamy od prostokątów kratowych o bokach równoległych do osi układu współrzędnych: Niech $A=(u,\,v)$, $B=(u+k,\,v)$, $C=(u+k,\,v+l)$ i $D=(u,\,v+l)$ będą wierzchołkami prostokąta kratowego, zob. rysunek 0.C8*a*. Łatwo sprawdzić, że wówczas $b=2k+2l$, a $w=(k-1)(l-1)$. Stąd $w+\frac{1}{2}b-1=kl=S_{ABCD}$, co dowodzi wzoru Picka w tym przypadku.



Rys. 0.C8*a*



Rys. 0.C8*b*

(2) Przechodzimy do prostokątnych trójkątów kratowych o przyprostokątnych równoległych do osi układu współrzędnych. Każdy taki trójkąt jest „połową” odpowiedniego prostokąta. Na przyprostokątnych tego trójkąta znajdujemy $k+l+1$ punktów kratowych. Oznaczmy przez e liczbę punktów kratowych leżących na przeciwprostokątnej (bez końców A, C, bo te leżą na przyprostokątnych). Więc w tym przypadku, $b=k+l+1+e$. Zaś $2w+e=(k-1)(l-1)$ (bo wewnętrznych punktów kratowych w trójkątach $\triangle ADC$ i $\triangle ABC$ jest tyle samo). Zatem:

$$w+\tfrac{1}{2}b-1=\tfrac{1}{2}[(k-1)(l-1)-e]+\tfrac{1}{2}(k+l+1+e)-1=\tfrac{1}{2}kl=S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABC}.$$

(3) Czytelnik samodzielnie(!?) uzasadni wzór Picka dla dowolnego trójkąta. Zauważy przy tym, że, jakkolwiek każdy trójkąt kratowy można „otoczyć” prostokątem kratowym (i obliczać jego pole jako różnicę pola prostokąta i pól prostokątnych trójkątów „otaczających”), to nie zawsze to wygląda tak jak na załączonym rysunku (a co, gdy bok trójkąta jest przekątną „otaczającego” prostokąta?).

(4) Wzóru Picka dla dowolnego wielokąta kratowego dowodzimy przez indukcję „rozcinając” dany wielokąt kratowy $\mathcal{W}$ na dwa wielokąty $\mathcal{W}_1$ i $\mathcal{W}_2$ za pomocą przekątnej (takiej jak $\overline{EF}$ na rysunku). Oznaczmy przez w_i liczbę wewnętrznych punktów kratowych w wielokącie $\mathcal{W}_i$ (dla $i=1,\,2$), a przez w_0 liczbę wewnętrznych punktów kratowych leżących na przekątnej $\overline{EF}$. Wówczas liczba w wewnętrznych punktów kratowych w wielokącie $\mathcal{W}$ jest równa $w_1+w_0+w_2$. Niech b'_i będzie liczbą punktów kratowych na części brzegu wielokąta $\mathcal{W}_i$ bez odcinka $\overline{EF}$. Wtedy $b(\mathcal{W}_i)=b'_i+w_0+2$ dla $i=1,\,2$. Równości $S(\mathcal{W}_i)=w_i+\frac{1}{2}b(\mathcal{W}_i)-1$ dla $i=1,\,2$, są prawdziwe na mocy(!) założenia indukcyjnego. Liczymy więc pole $S(\mathcal{W})$ jako sumę pól $S(\mathcal{W}_1)+S(\mathcal{W}_2)$:

$$S(\mathcal{W})=w_1+\tfrac{1}{2}(b'_1+w_0+2)-1+w_2+\tfrac{1}{2}(b'_2+w_0+2)-1=w_1+w_0+w_2+\tfrac{1}{2}(b'_1+b'_2+2)-1.$$

To dowodzi wzoru Picka dla wielokąta $\mathcal{W}$ bo, oczywiście, $b(\mathcal{W})=b'_1+b'_2+2$.

Mamy nadzieję, że Czytelnik zauważył l u k ę w przedstawionym rozumowaniu: Słabym punktem tegoż jest brak uzasadnienia i s t n i e n i a przekątnej dzielącej wielokąt kratowy na dwa wielokąty (w dodatku kratowe!). Istnienie takiej przekątnej jest o c z y w i s t e, gdy wielokąt $\mathcal{W}$ jest wypukły (wtedy k a ż d a przekątna jest dobra, bo każda zawiera się w $\mathcal{W}$). W przypadku, gdy $\mathcal{W}$ nie jest wypukły, możemy rozumować tak: Najpierw przywołujemy naszą dobrą (i/bo pożyteczną) znajomą, o t o c z k ę w y p u k ł ą, zob. rys. 0.C8*b*. Wiemy, że ta otoczka jest wielokątem wypukłym, którego wierzchołkami są (niektóre!) wierzchołki naszego wielokąta $\mathcal{W}$. Dzięki temu znajdujemy kąt $\sphericalangle BAC$ o mierze $< 180°$ (wypukły, zob. $\mathbb{PLA}$ A5). Wówczas, albo $\overline{BC}$ jest zawarty w $\mathcal{W}$ (i wtedy jest dobrym kandydatem na szukaną przekątną dzielącą $\mathcal{W}$ na dwa wielokąty kratowe), albo wewnątrz trójkąta $\triangle ABC$ leżą jakieś wierzchołki wielokąta $\mathcal{W}$. Niech D będzie jednym takim, że wewnątrz trójkąta $\triangle BDA$ nie ma żadnych wierzchołków wielokąta $\mathcal{W}$. Wtedy przekątna $\overline{BD}$ jest dobra.

Dobrze jest rozwiązać ćwiczenie (z elementarnej teorii liczb):

Ćwiczenie. $ABCD$ jest prostokątem kratowym o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. Dowieść, że we wnętrzu przekątnej $\overline{AC}$ leży $\mathrm{NWD}(|AB|, |BC|) - 1$ punktów kratowych.

Z0.D1 Udowodnimy lemacik:

Lemat: *Jeżeli mamy stos monet 1-sekowych, 2-sekowych i 5-sekowych, przy czym sumarycznie mamy 10n seków, to można te monety tak rozmieścić w n miseczkach, że zawartość każdej miseczki ma wartość 10 seków.*

Dowód. Każde dwie monety 5-sekowe wrzucamy do pustej miseczki, każde pięć monet 2-sekowych wrzucamy do pustej miseczki i każde dziesięć monet 1-sekowych wrzucamy do pustej miseczki. Zapełnimy w ten sposób n' miseczek. Pozostanie nam a monet 5-sekowych, b monet 2-sekowych i c monet 1-sekowych, przy czym $0 \leqslant a \leqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant 4$ i $0 \leqslant c \leqslant 9$. Mamy bilans i szacowanie:

$$10n = 10n' + 5a + 2b + c \leqslant 10n' + 5 + 8 + 9 = 10n' + 22.$$

Stąd wynika, że $5a+2b+c$ jest liczbą podzielną przez 10 i mniejszą niż 23. Czyli $5a+2b+c = 0$ lub $5a + 2b + c = 10$ lub $5a + 2b + c = 20$. Dwa pierwsze przypadki są trywialne. Gdy zaś $5a + 2b + c = 20$, to musi być $a = 1$ (gdyby było $a = 0$, to byłoby $20 = 2b + c \leqslant 8 + 9$). Wtedy $2b + c = 15$, skąd widać, że c jest nieparzyste (w szczególności $\neq 0$) i właściwe rozdzielenie tych a monet 5-sekowych, b monet 2-sekowych i c monet 1-sekowych do dwóch miseczek jest łatwe. Q.e.d.

Możemy teraz zacząć rozkładać pieniądze do sakiewek. Rozdzielmy stos na dwa podstosy: do pierwszego zaliczmy wszystkie drobniaki 5-, 2- i 1-groszowe, a do drugiego wszystkie pozostałe pieniądze. Łatwo widzieć, że sumaryczna wartość tych wszystkich pozostałych, wyrażona w groszach, jest liczbą podzielną przez 10. Zatem i sumaryczna wartość drobniaków (wyrażona w groszach) jest liczbą podzielną przez 10. Następnie, korzystając z lematu (przy ustaleniu 1 sek = 1 gr), rozmieszczamy te drobniaki w pewnej ilości miseczek, w każdej dokładnie 10 groszy. Monety z każdej z tych miseczek „sklejamy” w jedną „monetę” 10-groszową. Dzięki temu mamy nowy stos, w którym nie występują drobniaki, a sumaryczna wartość jest równa 1000 złotych. Dzielimy go na dwa podstosy: do pierwszego zaliczmy wszystkie monety (i „monety”) 50-, 20- i 10-groszowe, a do drugiego pozostałe pieniądze. Łatwo widzieć, że sumaryczna wartość tych wszystkich pozostałych, wyrażona w dziesiątkach groszy, jest liczbą podzielną przez 10. Zatem i sumaryczna wartość monet (i „monet”) w pierwszym stosie (wyrażona w dziesiątkach groszy) jest liczbą podzielną przez 10. Znowu więc możemy skorzystać z lematu (przy ustaleniu 1 sek = 10 gr). Dostaniemy nowy stos, w którym najmniejszy walor to 1 zł, a sumaryczna wartość jest ciągle ta sama, równa 1000 zł. Jasne, że jeszcze dwukrotnie stosując lemat (najpierw do monet (i „monet”) 1-, 2- i 5-złotowych, a potem do banknotów (a także „banknotów”!) 10-, 20- i 50-złotowych) znajdziemy stos banknotów (oraz „banknotów”) 100-złotowych o sumarycznej wartości 1000 złotych. Rozmieszczenie tych pieniędzy w 10-ciu sakiewkach 100-złotowych nie przedstawia żadnych trudności (matematycznych!).

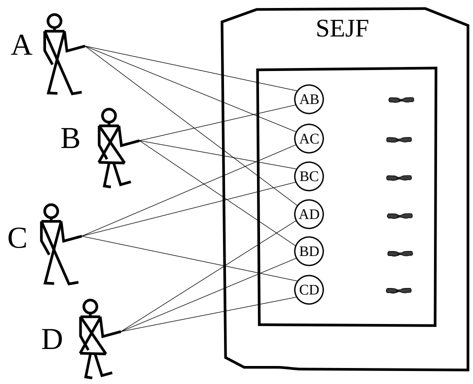
Z0.D2 Do i-tej (z ośmiu) sakiewki wrzucamy monety *zachłannie*, tzn. byle jak, obok zaś kładziemy monetę, której już nie możemy tam zmieścić. W ten sposób dostaniemy liczby $L_1, \ldots, L_8$ oraz $r_1, \ldots, r_8$, gdzie $L_i + r_i > 150$ dla $i = 1, \ldots, 8$. Więc $\sum_{i=1}^{8} L_i + r_i > 1200$. Wobec tego zostanie nam mniej niż $1350 - 1200 = 150$ ferklosów, które możemy wrzucić do dziewiątej sakiewki. Wreszcie, do dziesiątej sakiewki wrzucamy monety o nominałach r_1, r_2, r_3, r_4, a do jedenastej, monety o nominałach r_5, r_6, r_7, r_8. Ponieważ $r_i \leqslant 35$ dla każdego i, więc to jest możliwe!

Z0.D3 (IMO'2014) Pokażemy algorytm rozmieszczania tych monet w sakiewkach. W pierwszym kroku dokonujemy m o d y f i k a c j i: Każde dwie monety o nominale $\frac{1}{2k}$ (jeżeli takie są w naszym stosie) sklejamy w jedną „monetę” o nominale $\frac{1}{k}$, na przykład dwie monety o nominale $\frac{1}{6}$ w jedną „monetę” $\frac{1}{3}$-sekową. Ponadto, jeżeli w stosie jest $2k+1$ monet o nominale $\frac{1}{2k+1}$, to sklejamy je w jedną „monetę” 1-sekową. Robimy to tak długo jak się da, nawet używając „monet”. Po tej modyfikacji mamy stos monet i „monet”. Sumaryczna wartość jest ta sama co na początku, czyli $\leqslant 99,5$ seków. Natomiast jest tam co najwyżej jedna moneta (lub „moneta”) $\frac{1}{2}$-sekowa, co najwyżej jedna moneta (lub „moneta”) $\frac{1}{4}$-sekowa, itd., ogólnie, co najwyżej jedna moneta (lub „moneta”) $\frac{1}{2k}$-sekowa dla każdego k. A także co najwyżej d w i e monety (lub „monety”) $\frac{1}{3}$-sekowe, co najwyżej c z t e r y monety (lub „monety”) $\frac{1}{5}$-sekowe, itd., ogólnie, co najwyżej $2k$ monet (lub „monet”) $\frac{1}{2k+1}$-sekowych dla każdego k.

Mając to, wkładamy wszystkie monety i „monety” 1-sekowe do osobnych sakiewek. Powiedzmy, że jest ich m. Mamy jeszcze $n := 100 - m$ wolnych sakiewek. Do pierwszej z nich wkładamy monetę (lub „monetę”) $\frac{1}{2}$-sekową (jeżeli taka jest, jeżeli takiej nie ma to zostawiamy tę sakiewkę pustą!). Do drugiej wkładamy wszystkie monety (lub „monety”) $\frac{1}{3}$- i $\frac{1}{4}$-sekowe (ponieważ $2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{4} < 1$, więc jest to możliwe!). Do trzeciej wkładamy wszystkie monety (lub ”monety”) $\frac{1}{5}$- i $\frac{1}{6}$-sekowe, itd., do n-tej wkładamy wszystkie monety (lub „monety”) $\frac{1}{2n-1}$- i $\frac{1}{2n}$-sekowe. Po tej operacji mamy już 100 całkowicie lub częściowo zapełnionych sakiewek i pewną liczbę „monet” o nomiałach $\leqslant \frac{1}{2n+1}$.

Trzeci krok algorytmu ma charakter *zachłanny* (ang. *greedy*). Polega on na wkładaniu pozostałych monet do częściowo zapełnionych sakiewek „byle jak”, pamiętając jedynie, że w sakiewce nie może być więcej niż 1 sek. Twierdzimy, że w ten sposób wszystkie monety (i „monety”) znajdą się w sakiewkach. Rzeczywiście, załóżmy, że nie możemy nigdzie „upchnąć” monety o nominale $a \leqslant \frac{1}{2n+1}$, czyli że w każdej z n ewentualnie niepełnych sakiewek jest już więcej niż $1 - a$ seków. Wówczas zachodzą nierówności $99,5 \geqslant L > m + n(1-a) \geqslant m + n\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = 100 - \frac{n}{2n+1}$, skąd $\frac{n}{2n+1} > \frac{1}{2}$. Nonsens.

Z0.D4 Na rysunku pokazujemy, spełniający warunki zadania, sposób rozdania kluczy do sześciu zamków osobom A, B, C i D. Każda z tych czterech osób ma klucze do trzech zamków. Łatwo widać, że żadne dwie z tych osób nie mogą otworzyć wszystkich zamków, a każde trzy z nich mogą to zrobić. To, oczywiście, nie jest koniec rozwiązania zadania! Musimy jeszcze wykazać, że żadna m n i e j s z a niż sześć liczba zamków nie jest wystarczająca. Wystarczy w tym celu zauważyć, że dla każdej z sześciu par AB, AC, AD, BC, BD i CD ma istnieć zamek, którego osoby z tej pary nie mogą otworzyć. Więc zamków musi być co najmniej s z e ś ć.



Rys. 0.D4

U w a g a. Po zapoznaniu się z materiałem ustępu 1.4.2 i rozwiązaniem zadania Z2.17, Czytelnik nie powinien mieć żadnych trudności z dowodem takiego uogólnienia tezy naszego zadania:

T w i e r d z e n i e. *Jeżeli zbiór Ω ma co najmniej $\binom{n}{k}$ elementów, to w zbiorze tym można wskazać takich n podzbiorów, że suma dowolnych $k+1$ z tych podzbiorów jest równa Ω, a suma dowolnych k z nich jest różna od Ω. Ponadto, liczba $\binom{n}{k}$ jest najmniejsza z możliwych.*

Z0.D5 Rozważmy tablicę

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \end{array}$$

Gdyby ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ spełniał narzucone warunki, to suma liczb w każdym wierszu tej tablicy byłaby liczbą ujemną, więc i suma wszystkich liczb tej tablica byłaby liczbą u j e m n ą. Jednocześnie zaś suma liczb w dowolnej kolumnie byłaby liczbą dodatnią, więc też suma wszystkich liczb tej tablicy byłaby liczbą d o d a t n i ą. Sprzeczność.

U w a g a 1. Analogicznie dowodzimy twierdzonka:

T w i e r d z e n i e. *Niech m, n będą liczbami naturalnymi. Załóżmy, że w ciągu $(a_1, \ldots, a_r)$ długości r o wyrazach rzeczywistych suma dowolnych m jego kolejnych wyrazów jest > 0, a suma dowolnych n jego kolejnych wyrazów jest < 0. Wówczas $r \leqslant m + n - 2$.*

U w a g a 2. Ciąg $(3, 3, -8, 3, 3, 3, -8, 3, 3)$ ma długość 9 i, jak łatwo sprawdzić, suma każdych jego kolejnych czterech wyrazów jest równa $+1$, a suma każdych jego kolejnych siedmiu wyrazów jest równa -1. Ten przykład pokazuje, że n a j d ł u ż s z y taki ciąg o wyrazach rzeczywistych, że suma każdych jego kolejnych czterech wyrazów jest > 0, a suma każdych jego kolejnych siedmiu wyrazów jest < 0, ma długość 9. Na IMO (1977) zaproponowano:

Z a d a n i e. W ciągu liczb rzeczywistych suma każdych kolejnych 7 wyrazów jest < 0, a suma każdych kolejnych 11 wyrazów jest > 0. Wyznaczyć maksymalną długość takiego ciągu.

R o z w i ą z a n i e. Wiemy już, że ta długość jest $\leqslant 11 + 7 - 2 = 16$. Wystarczy więc pokazać ciąg długości 16, w którym suma każdych kolejnych 7 wyrazów jest < 0, a suma każdych kolejnych 11 wyrazów jest > 0. Oto przykład: $(5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5)$.

Ć w i c z e n i e. Dane są względnie pierwsze liczby naturalne m, n. Udowodnić, że istnieje ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ o wyrazach rzeczywistych, długości $r = m + n - 2$ i taki, że suma każdych kolejnych jego m wyrazów jest < 0, a suma każdych kolejnych jego n wyrazów jest > 0.

U w a g a 3. Oto, rozpisany na dwanaście miesięcy, roczny budżet pewnego państwa:

$$(10, 10, -7, -7, -7, 10, 10, -7, -7, -7, 10, 10).$$

Widzimy zabawną okoliczność: w ciągu dowolnych kolejnych pięciu miesięcy mamy d e f i c y t w wysokości 1 *mld*, ale w ciągu całego roku mamy n a d w y ż k ę w takiej samej wysokości.

Z0.D6 Rozumujemy przez indukcję względem n.

B a z a i n d u k c j i: $n = 4$. Niech danymi 4 osobami będą A, B, C i D. Najpierw (pierwsza rozmowa) osoby A i B przekazują sobie wzajemnie posiadane informacje, następnie (druga rozmowa) robią to samo osoby C i D. Potem (trzecia rozmowa) osoby A i C przekazują sobie wzajemnie wszystko co wiedzą o rzeczonych dokumentach (wówczas osoby A i C wiedzą już wszystko!). Wreszcie (czwarta rozmowa) rozmawiają osoby B i D. Po tych czterech $(4 = 2 \cdot 4 - 4)$ rozmowach wszyscy wiedzą wszystko.

K r o k i n d u k c y j n y: $n \rightsquigarrow n + 1$. Rozważmy teraz $n + 1$ osób. Niech Z będzie jedną z nich, a A będzie jedną z n pozostałych osób. W 1 rozmowie telefonicznej osoba Z przekazuje posiadane przez siebie informacje osobie A. Następnie, w trakcie $2n - 4$ rozmów między osobami różnymi od Z wszystkie one, zgodnie z założeniem indukcyjnym, mogą poznać treść wszystkich dokumentów (treści przechowywane pierwotnie przez osobę Z może im przekazać osoba A). Wreszcie, wystarczy wykonać połączenie telefoniczne między osobą Z i dowolną z pozostałych osób, by i osoba Z znała treść wszystkich dokumentów. Ponieważ $1 + (2n - 4) + 1 = 2(n + 1) - 4$, więc kończymy rozumowanie.

Z0.D7 Niech Ω będzie zbiorem członków klubu. Podzbiór $\mathcal{W} \subseteq \Omega$ nazwijmy *dobrym*, gdy żaden członek $A \in \mathcal{W}$ nie otrzymał kapelusza od innego członka $B \in \mathcal{W}$. Podzbiory *dobre* istnieją, na przykład wszystkie podzbiory jednoelementowe są *dobre* (nikt nie wysyłał kapelusza sam do siebie!). Niech więc $\mathcal{W}_0$ będzie n a j l i c z n i e j s z y m podzbiorem *dobrym*. Pokażemy, że $|\mathcal{W}_0| \geqslant 10$. Oznaczmy w tym celu przez $\mathcal{Z}$ zbiór tych członków, którzy otrzymali kapelusz od kogoś ze zbioru $\mathcal{W}_0$. Jasne, że $|\mathcal{Z}| \leqslant |\mathcal{W}_0|$ (bo kapelusze się nie rozmnażają na poczcie!) i $\mathcal{Z} \cap \mathcal{W}_0 = \varnothing$ (bo $\mathcal{W}_0$ jest zbiorem *dobrym*). Rozważmy zbiór $\mathcal{W}_1$ tych członków klubu, którzy nie nie należą ani do $\mathcal{W}_0$ ani do $\mathcal{Z}$. Niech $A \in \mathcal{W}_1$. Do kogo mógł wysłać swój kapelusz członek A? Gdyby wysłał do kogoś spoza zbioru $\mathcal{W}_0$, to zbiór $\mathcal{W}_0 \cup \{A\}$ byłby w i ę k s z y m niż $\mathcal{W}_0$ zbiorem *dobrym*, co jest niemożliwe. Zatem wysłał swój kapelusz do kogoś z $\mathcal{W}_0$. W szczególności, n i e wysłał do nikogo ze zbioru $\mathcal{W}_1$. Więc zbiór $\mathcal{W}_1$

jest zbiorem *dobrym*. Zatem $|\mathcal{W}_1| \leqslant |\mathcal{W}_0|$ (bo $\mathcal{W}_0$ jest najliczniejszym zbiorem *dobrym*). Otrzymane nierówności $|\mathcal{W}_1| \leqslant |\mathcal{W}_0|$ i $|\mathcal{Z}| \leqslant |\mathcal{W}_0|$ wraz z równościami $30 = |\mathcal{W}_0 \cup \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{Z}| = |\mathcal{W}_0| + |\mathcal{W}_1| + |\mathcal{Z}|$ dają nierówność $|\mathcal{W}_0| \geqslant 10$.

Uwaga 1. Liczby 10 w oszacowaniu $|\mathcal{W}| \geqslant 10$ (dla pewnego zbioru *dobrego*) nie da się poprawić: jest możliwe takie wysyłanie kapeluszy, że nie ma 11-elementowych zbiorów *dobrych*. Na przykład tak: numerując dowolnie członków resztami $0, 1, \ldots, 29$ z dzielenia przez 30 i rozkazując członkowi o numerze $k \pmod{30}$ wysłać kapelusz do członka o numerze $k + 10 \pmod{30}$, łatwo sprawdzamy, że nie ma tam 11-elementowych zbiorów *dobrych*.

Uwaga 2. W pokazanym rozwiązaniu używamy najprostszych oznaczeń teorii zbiorów. Czytelnik może, jeżeli zachodzi taka potrzeba, zajrzeć do ustępów 1.1.2 i 1.3.1, zob. zwłaszcza UAS. Jeszcze ważniejsze jest zajrzenie do paragrafu 1.2. Za pomocą opisanego tam pojęcia *funkcji* możemy sformułować tezę naszego zadania tak: *Jeżeli Ω jest zbiorem 30-elementowym, a $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ jest funkcją bez punktów stałych, to istnieje 10-elementowy podzbiór $\mathcal{W} \subseteq \Omega$ rozłączny z obrazem $f(\mathcal{W})$.* Dobrym ćwiczeniem dla (zwłaszcza początkującego) Czytelnika jest udowodnienie i porządne zapisanie dowodu takiego twierdzenia:

Twierdzenie. *Jeżeli X jest zbiorem skończonym, a $f : X \longrightarrow X$ jest funkcją bez punktów stałych, to istnieje taki podzbiór $A \subseteq X$, że $|A| \geqslant \lceil |X|/3 \rceil$ i $f(A) \cap A = \varnothing$.*

W dowodzie tego twierdzenia ważną rolę gra nierówność $|f(A)| \leqslant |A|$ prawdziwa dla dowolnej funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i dowolnego podzbioru skończonego $A \subseteq X$. W naszym rozwiązaniu uzasadnialiśmy to argumentem „kapelusze nie rozmnażają się na poczcie”.

Uwaga 3. Taką samą sytuację matematyczną rozpoznać można w poniższym ćwiczeniu:

Ćwiczenie. Każdy z 460 posłów zniesławił innego posła. Udowodnić, że można utworzyć taką 154-osobową komisję sejmową, w której nikt nikogo nie zniesławił.

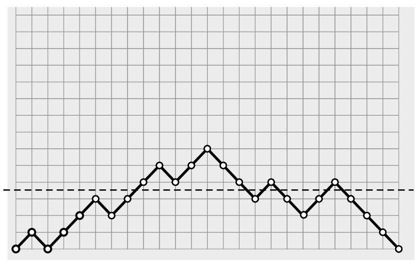
Z0.D8 Wybierzmy z pierwszej kartki dowolną cyfrę. Załóżmy, że znajduje się ona w liczbie k. Otoczmy wybraną cyfrę kółkiem, liczbę k przepiszmy na osobną karteczkę, dopiszmy tuż za wybraną cyfrą cyfrę 0, tak otrzymaną liczbę odnajdźmy na drugiej kartce i otoczmy tam kółkiem tę właśnie „dołożoną” cyfrę 0. W ten sposób każdej cyfrze napisanej na pierwszej kartce przyporządkowujemy cyfrę 0 napisaną na kartce drugiej. Musimy uzasadnić, że to przyporządkowanie jest odwracalne, to znaczy, że każda cyfra 0 z drugiej kartki odpowiada dokładnie jednej cyfrze z kartki pierwszej.

Z0.E1 Zadanie tłumaczymy na proste zadanie z kombinatoryki geometrycznej:

Zadanie. Dana jest taka skończona rodzina $\mathscr{R}$ przedziałów, że z każdych trzech z nich co najmniej dwa mają punkt wspólny. Udowodnić, że istnieją takie dwie liczby α, β, że dla każdego przedziału $I \in \mathscr{R}$ zachodzi $\alpha \in I$ lub $\beta \in I$.

Rozwiązanie. Niech $\mathscr{R} = \{[\,a_i; b_i\,] : i = 1, 2, \ldots, n\}$. Niech $a_k = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ oraz $b_l = \min\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Połóżmy $\alpha = a_k$ i $\beta = b_l$. W języku *czytelnianym* α jest momentem ostatniego wejścia, a β jest momentem pierwszego wyjścia. Sprawdzenie, że liczby α i β są dobre, pozostawiamy Czytelnikowi (naszego skryptu!).

Z0.E2 Aby przekonać się, że rzeczywiście na obu tablicach zawsze znajdą się te same liczby, kierownik czytelni zawiesił jeszcze jedną (środkową) tablicę. Tablica ta wygląda jak papier w kratkę. Zarządził też, że, poza dotychczas obowiązującymi przepisami (o wpisywaniu liczb na tablicach P i K), pierwszy wchodzący czytelnik ma narysować przekątną $\diagup$ lewego dolnego kwadratu, każdy kolejny wchodzący czytelnik ma dorysować do prawego końca zastanej łamanej przekątną $\diagup$, a każdy wychodzący czytelnik ma dorysowć do prawego końca zastanej łamanej przekątną $\diagdown$.



Rys. 0.E2

Zauważmy, że wykonanie tej, dodatkowej, czynności jest dużo łatwiejsze – czytelnik nawet nie musi umieć liczyć! Jasnym być powinno, że wieczorem (po wyjściu ostatniego czytelnika) pan kierownik zobaczy na środkowej tablicy łamaną taką jak na rysunku 0.E1. Konkretnie:

(1) Łamana „zaczyna” się (w lewym dolnym rogu) i „kończy” na tym samym poziomie. To wynika z faktu, że jest tyle samo odcinków $\diagup$ co odcinków $\diagdown$ (każdy czytelnik rysuje jeden odcinek $\diagup$, wchodząc do czytelni, i jeden odcinek $\diagdown$, wychodząc z czytelni).

(2) Znając tę łamaną znamy całą historię czytelni tego dnia. Na przykład na pokazanym rysunku widzimy, że w czasie pobytu w czytelni pierwszego czytelnika nie pojawił się żaden inny czytelnik.

(3) Każda, przechodząca przez środki boków łamanej, prosta równoległa do dolnej krawędzi tablicy, przecina tyle samo odcinków $\diagup$ co odcinków $\diagdown$. Ponieważ taka prosta, „wchodząc” pod łamaną, musi znowu „wyjść” nad łamaną, więc to jest jasne.

(4) Każdy czytelnik wchodzący wpisuje na tablicy P liczbę całkowitą będącą rzędną lewego (dolnego) końca odcinka $\diagup$, który następnie rysuje na tablicy środkowej. A każdy czytelnik wychodzący, po narysowaniu swojego odcinka $\diagdown$, na tablicy K wpisuje rzędną prawego (dolnego) końca tego odcinka.

Z0.F1 Każda matematyczka już w drodze do domu dowodzi następującego twierdzenia:

Twierdzenie. *Jeżeli w miasteczku jest N zamężnych matematyczek, to (przy opisanych warunkach) liczba $n \leqslant N$ niewiernych mężów jest dokładnie równa numerowi dnia, w którym wszyscy zostaną straceni.*

Dowód. Stosujemy indukcję względem liczby n niewiernych mężów.

Baza indukcji. Załóżmy, że $n = 1$ i że tylko mąż pani A jest niewierny. Wówczas pani A, po przyjściu do domu, uzmysławia sobie, że: (1) w miasteczku są niewierni mężowie (tak mówiła pani burmistrz), (2) wszyscy mężowie różni od mojego męża są wierni (w przeciwnym razie wiedziałabym to). Nie trzeba być wybitnie inteligentną żoną, by wywnioskować z tych dwóch zdań, że to pan A jest niewierny. Wystarczy teraz spokojnie czekać do wieczora.... Co w tym samym czasie myśli pani B (różna od A)? Myśli, oczywiście, tak: (1) wiem, że pan A jest niewierny, (2) gdyby był on jedynym niewiernym mężem w całym miasteczku, moja sąsiadka pani A straciłaby go dziś wieczorem. Wystarczy (z obawą(?), może z nadzieją(?)) czekać do wieczora.... Widzimy, że jedyny niewierny mąż zostanie stracony dnia pierwszego.

Krok indukcyjny. Załóżmy, że teza zachodzi dla wszystkich takich liczb n, że $1 \leqslant n < m$, i rozważmy miasteczko, w którym jest m niewiernych mężów. W takim miasteczku mieszkają dwa typy żon-matematyczek: (1) te, których mąż jest niewierny (takich żon jest m), (2) te, których mąż jest wierny. Oto rozmyślania żon typu (1): Gdyby mój mąż był wierny, to żony wszystkich znanych mi $m-1$ wiarołomców, stracą swoich mężów dnia $(m-1)$-szego, muszę więc spokojnie czekać aż do tego dnia, a potem się zobaczy. Oto zaś rozmyślania żon typu (2): Znam m niewiernych mężów. Nie wiem czy mój mąż jest mi wierny czy nie. Więc nic nie robię. Tymczasem żony typu (1), doczekawszy wieczora dnia $(m-1)$-szego, idą na publiczny plac straceń i nic nie widzą. Za to już wszystko wiedzą. Wracają do domu i szykują narzędzia dekapitacyjne. Użyją ich następnego wieczora.

Z0.F2 Wiemy z elementarnej algebry (zob. *wzory Viète'a*), lub dowodzimy sami, że m, n są pierwiastkami równania $x^2 - Ax + I = 0$. To znaczy że znajomość zbioru $\{m, n\}$ jest równoważna znajomości liczb A i I. Dwugłos Ideli i Adeli mógłby więc brzmieć tak:

(1) *Nie umiem wyznaczyć liczby A.*

(2) *Wiedziałam to.*

(3) *Zatem ja już umiem wyznaczyć liczbę A.*

(4) *A ja już umiem wyznaczyć liczbę I.*