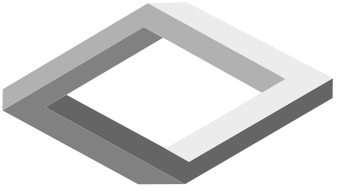
MATEMATYKA OLIMPIJSKA

$\star$

Algebra i Teoria Liczb

Adam Neugebauer



CZERWIEC 2018

Opracowanie graficzne: *Autorzy*

Wydanie I

ISBN: 978-83-7267-710-5

Wydawnictwo Szkolne OMEGA, 30–552 Kraków, ul. Wielicka 44 C
tel. 12 4 256 256; +48 662 152 899
www.ws-omega.com.pl e-mail: biuro@ws-omega.com.pl

Przedmowa

Przedstawiamy pierwsze całościowe chociaż nieostateczne[1] wydanie serii podręczników pod wspólnym tytułem MATEMATYKA OLIMPIJSKA. Mamy tu na myśli matematykę elementarną w zakresie wyznaczonym przez zadania OM (krajowe i międzynarodowe). Matematyka ta, mimo niewielkiego obciążenia definicyjnego, jest bliższa matematyce *akademickiej* niż matematyce *szkolnej*. Proponowany sposób wykładu (definicja, twierdzenie, przykłady, zadania i ćwiczenia[2]) jest więc bliższy akademickiemu niż szkolnemu. Szczegółowy spis treści powinien dawać dostatecznie dobre wyobrażenie o terytorium zajmowanym przez Matematykę Olimpijską w królestwie matematyki. Każdy tom kończy się krótką bibliografią, w której pokazujemy kilka źródeł dających możliwość rozszerzenia i pogłębienia przedmiotowej wiedzy. W indeksie zamieszczamy również terminy zaledwie wspomniane w tekście. Powinno to rozbudzać ciekawość Czytelników i zachęcać do samodzielnych poszukiwań w literaturze. Znak $\Diamond$ oznacza koniec rozwiązania zadania lub koniec przykładu, a znak $\square$ – koniec dowodu (lub tylko sformułowania) twierdzenia. Czasami zamiast *wtedy i tylko wtedy, gdy* piszemy iff (ang. *if and only if*), a zamiast *bez straty ogólności* piszemy b.s.o. Napis $\xi := \zeta$ oznacza: ξ *jest z definicji (z określenia) równe* ζ.

Poszczególne części *żółtego*, *zielonego* i *czerwonego* skryptów były wielokrotnie w latach 2007-2017 wydawane jako preprinty w niewielkich nakładach. Znalazły one pewne uznanie w oczach niektórych nauczycieli zajmujących się kształceniem uczniów-olimpijczyków. W szczególności, dr Jacek Dymel (Kraków), opiekun naukowy i wychowawca licznych laureatów OM i MOM, zachęcił nas do przygotowania niniejszego wydania.

Serdeczne p o d z i ę k o w a n i a składamy profesorowi Andrzejowi Schinzlowi za aprobatę naszej wizji teorioliczbowej części przedsięwzięcia (pozostałe części wzorują się na niej) i wskazanie błędów. Kolega Wojtek Wawrów wskazał nam niepoliczalny zbiór usterek i błędów w poprzednich wersjach trzech części, a także kilka propozycji ulepszenia tych części. Zasłużył tym na naszą bezgraniczną wdzięczność. Nasi uczniowie (i koledzy jednego z nas) Marcin Michorzewski, Paweł Poczobut i Krzysztof Małysa w różnych okresach powstawania serii byli bardzo pomocni. Dziękujemy im za to.

A P E L. Mimo licznych wysiłków, w książkach z pewnością pozostało jeszcze sporo do poprawienia. Wobec tego zwracamy się do Was, drodzy Czytelnicy, z gorącym apelem o krytyczne czytanie i informowanie o zauważonych błędach i innych niedostatkach zarówno merytorycznych jak i dydaktycznych (adres: **koloroweskrypty @ gmail.com**). Bylibyśmy bardzo wdzięczni za wzięcie sobie do serca tego apelu. Nasze reakcje na Wasze uwagi zamieszczamy na stronie **sites.google.com/site/koloroweskrypty**. *A u t o r z y*

[1] Mamy nadzieję na napisanie *Kolorowego suplementu*, w którym znajdą się brakujące na razie fragmenty.

[2] Użyte przykłady, zadania i ćwiczenia, poza trywialnymi, n i e są oryginalne. Pochodzą z rozmaitych źródeł, głównie z zawodów i olimpiad matematycznych. Wyjątkowo tylko wskazujemy z jakich.

Słowo wstępne do tomu

Mathematik ist die Königin der Wissennschaften und
die Zahlentheorie die Königin der Mathematik.[3]
(Carl Friedrich Gauss)

T o m p i e r w s z y ($\mathbb{ATL}$ – *żółty*) przedstawia podstawowe pojęcia i metody elementarnej *Algebry i Teorii Liczb*. Jest w zasadzie samowystarczalny: zaczyna się od **liczb naturalnych**. Dążąc do **krzywych eliptycznych**, po drodze mówi o jednoznaczności rozkładu na **czynniki nierozkładalne** w **pierścieniu** liczb całkowitych i **pierścieniu wielomianów**, **kongruencjach**, **ułamkach łańcuchowych**, **formach kwadratowych**, **ciągach rekurencyjnych**, **pierścieniach kwadratowych**, i o **równaniach diofantycznych**, w szczególności o **równaniu indyjskim**. Centralnym rozdziałem skryptu jest rozdział 5: badanie reszt z dzielenia liczb całkowitych przez ustaloną liczbę m – **moduł** – dostarcza mocnego narzędzia teorioliczbowego – **arytmetyki modulo** m – z którym powinni oswajać się już gimnazjaliści.

Motta podajemy w ich oryginalnych językach.[4]

Książkę należy zacząć czytać od *Elementarza* (rozdział 2) następnie przejść do *Arytmetyki Modularnej* (rozdział 5), stopniowo, gdy pojawia się potrzeba, zapoznając się z materiałem rozdziałów 1, 3 i 4. Kolejność czytania dalszych rozdziałów jest w zasadzie dowolna.

Rozdziały 2, 3 i 4 kończą się zestawami zadań treningowych i wskazówkami/rozwiązaniami. Proponowana kolejność działań:

(0) dobrze zrozum matematyczną treść zadania i wykonaj e k s p e r y m e n t y rachunkowe,

(1) szukaj rozwiązania (nie rezygnuj przed upływem jednej godziny!),

(2) czytaj (z ołówkiem w ręce) pokazaną wskazówkę/rozwiązanie uzupełniając wszystkie szczegóły, i porównaj z rozwiązaniem własnym (jeżeli takowe masz),

(3) spróbuj znaleźć uogólnienie,

(4) zreferuj kolegom.

Życzymy owocnej lektury.

[3] Matematyka jest królową nauki, a teoria liczb – królową matematyki.

[4] Na życzenie niektórych Czytelników poprzednich (preprintowych) wydań dodajemy teraz ich tłumaczenia.

Tabliczka chronologiczna

Euklides z Aleksandrii	(ok. 365 p.n.e. - ok. 300 p.n.e.)
Eratostenes z Cyreny	(275 p.n.e. - 194 p.n.e.)
Diofantos z Aleksandrii	(III - IV wiek n.e.)
Brahmagupta	(598 - 660)
Bhaskara	(1114 - 1185)
Leonardo Pisano Bigollo zw. **Fibonacci**	(ok. 1170 - ok. 1240)
Niccolò Fontana zw. **Tartaglia**	(ok. 1499 - 1557)
François **Viète**	(1540 - 1603)
Claude Gaspard **Bachet de Méziriac**	(1581 - 1638)
Pierre de **Fermat**	(1601 - 1665)
Isaac **Newton**	(1643 - 1727)
Jakob **Bernoulli**	(1654 - 1705)
Leonhard **Euler**	(1707 - 1783)
Étienne **Bézout**	(1730 - 1783)
Joseph-Louis **Lagrange**	(1736 - 1813)
Adrien Marie **Legendre**	(1752 - 1833)
Sophie **Germain**	(1776 - 1831)
Carl Friedrich **Gauss**	(1777 - 1855)
August Ferdinand **Möbius**	(1790 - 1868)
Peter Gustav **Lejeune-Dirichlet**	(1805 - 1859)
Joseph **Liouville**	(1809 - 1882)
Évariste **Galois**	(1811 - 1832)
James Joseph **Sylvester**	(1814 - 1897)
Pafnucy **Czebyszew**	(1821 - 1894)
Charles **Hermite**	(1822 - 1901)
Gotthold **Eisenstein**	(1823 - 1852)
Richard **Dedekind**	(1831 - 1916)
François Édouard **Lucas**	(1842 - 1891)
Georg **Frobenius**	(1849 - 1917)
Adolf **Hurwitz**	(1859 - 1919)
Kurt **Hensel**	(1861 - 1941)
David **Hilbert**	(1862 - 1943)
Hermann **Minkowski**	(1864 - 1909)
Jacques **Hadamard**	(1865 - 1963)
Charles **de la Vallée Poussin**	(1866 - 1962)
Srinivasa **Ramanujan**	(1887 - 1920)

Liczby pierwsze $3 \leqslant p \leqslant 2011$ i ich pierwiastki pierwotne

p	g	g'	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g	p	g
3	2	-1	**173**	2	**397**	5	**641**	3	**887**	5	**1163**	5	**1451**	2	**1721**	3
5	2	-2	**179**	2	**401**	3	**643**	11	**907**	2	**1171**	2	**1453**	2	**1723**	3
7	3	-2	**181**	2	**409**	21	**647**	5	**911**	17	**1181**	7	**1459**	5	**1733**	2
11	2	-3	**191**	19	**419**	2	**653**	2	**919**	7	**1187**	2	**1471**	6	**1741**	2
13	2	-2	**193**	5	**421**	2	**659**	2	**929**	3	**1193**	3	**1481**	3	**1747**	2
17	3	-3	**197**	2	**431**	7	**661**	2	**937**	5	**1201**	11	**1483**	2	**1753**	7
19	2	-4	**199**	3	**433**	5	**673**	5	**941**	2	**1213**	2	**1487**	5	**1759**	6
23	5	-2	**211**	2	**439**	15	**677**	2	**947**	2	**1217**	3	**1489**	14	**1777**	5
29	2	-2	**223**	3	**443**	2	**683**	5	**953**	3	**1223**	5	**1493**	2	**1783**	10
31	3	-7	**227**	2	**449**	3	**691**	3	**967**	5	**1229**	2	**1499**	2	**1787**	2
37	2	-2	**229**	6	**457**	13	**701**	2	**971**	6	**1231**	3	**1511**	11	**1789**	6
41	6	-6	**233**	3	**461**	2	**709**	2	**977**	3	**1237**	2	**1523**	2	**1801**	11
43	3	-9	**239**	7	**463**	3	**719**	11	**983**	5	**1249**	7	**1531**	2	**1811**	6
47	5	-2	**241**	7	**467**	2	**727**	5	**991**	6	**1259**	2	**1543**	5	**1823**	5
53	2	-2	**251**	6	**479**	13	**733**	6	**997**	7	**1277**	2	**1549**	2	**1831**	3
59	2	-3	**257**	3	**487**	3	**739**	3	**1009**	11	**1279**	3	**1553**	3	**1847**	5
61	2	-2	**263**	5	**491**	2	**743**	5	**1013**	3	**1283**	2	**1559**	19	**1861**	2
67	2	-4	**269**	2	**499**	7	**751**	3	**1019**	2	**1289**	6	**1567**	3	**1867**	2
71	7	-2	**271**	6	**503**	5	**757**	2	**1021**	10	**1291**	2	**1571**	2	**1871**	14
73	5	-5	**277**	5	**509**	2	**761**	6	**1031**	14	**1297**	10	**1579**	3	**1873**	10
79	3	-2	**281**	3	**521**	3	**769**	11	**1033**	5	**1301**	2	**1583**	5	**1877**	2
83	2	-3	**283**	3	**523**	2	**773**	2	**1039**	3	**1303**	6	**1597**	11	**1879**	6
89	3	-3	**293**	2	**541**	2	**787**	2	**1049**	3	**1307**	2	**1601**	3	**1889**	3
97	5	-5	**307**	5	**547**	2	**797**	2	**1051**	7	**1319**	13	**1607**	5	**1901**	2
101	2	-2	**311**	17	**557**	2	**809**	3	**1061**	2	**1321**	13	**1609**	7	**1907**	2
103	5	-2	**313**	10	**563**	2	**811**	3	**1063**	3	**1327**	3	**1613**	3	**1913**	3
107	2	-3	**317**	2	**569**	3	**821**	2	**1069**	6	**1361**	3	**1619**	2	**1931**	2
109	6	-6	**331**	3	**571**	3	**823**	3	**1087**	3	**1367**	5	**1621**	2	**1933**	5
113	3	-3	**337**	10	**577**	5	**827**	2	**1091**	2	**1373**	2	**1627**	3	**1949**	2
127	3	-9	**347**	2	**587**	2	**829**	2	**1093**	5	**1381**	2	**1637**	2	**1951**	3
131	2	-3	**349**	2	**593**	7	**839**	11	**1097**	3	**1399**	13	**1657**	11	**1973**	2
137	3	-3	**353**	3	**599**	7	**853**	2	**1103**	5	**1409**	3	**1663**	3	**1979**	2
139	2	-4	**359**	7	**601**	7	**857**	3	**1109**	2	**1423**	3	**1667**	2	**1987**	2
149	2	-2	**367**	6	**607**	3	**859**	2	**1117**	2	**1427**	2	**1669**	2	**1993**	5
151	6	-5	**373**	2	**613**	2	**863**	5	**1123**	2	**1429**	6	**1693**	2	**1997**	2
157	5	-5	**379**	2	**617**	3	**877**	2	**1129**	11	**1433**	3	**1697**	3	**1999**	3
163	2	-4	**383**	5	**619**	2	**881**	3	**1151**	17	**1439**	7	**1699**	3	**2003**	5
167	5	-2	**389**	2	**631**	3	**883**	2	**1153**	5	**1447**	3	**1709**	3	**2011**	3

Spis treści

Rozdział 1

Pojęcia podstawowe

Les nombres (entiers) me semblent constituer comme un monde de réalités qui existent en dehors de nous avec la même caractère d'absolue nécessité que les réalités de la nature dont la connaissance nous est donnée par nos sens.[1]
(Charles Hermite w liście do Georga Cantora)

W rozdziale tym przypominamy podstawowe fakty dotyczące liczb naturalnych oraz poznajemy definicje najważniejszych struktur algebraicznych takich jak grupa, pierścień i ciało. W końcu rozdziału poznajemy nowy rodzaj liczb: liczby zespolone.

1.1 Liczby naturalne

Zakładamy, że Czytelnik jest dobrze zaznajomiony z pojęciem **liczby całkowitej**. Zbiór wszystkich liczb $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ oznaczamy przez $\mathbb{Z}$. D o d a t n i e elementy tego zbioru nazywamy **liczbami naturalnymi**. Zbiór liczb naturalnych oznaczamy symbolem $\mathbb{N}$. W niektórych podręcznikach zero uważa się za liczbę naturalną. Nam będzie wygodniej zaczynać liczby naturalne od 1.

1.1.1 Kilka zasad podstawowych

Najważniejszym faktem dotyczącym liczb naturalnych jest Zasada Minimum. Jest ona w istocie aksjomatem (czyli twierdzeniem przyjmowanym bez dowodu).

Zasada minimum *Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych zawiera (dokładnie jedną) liczbę najmniejszą.*

Standardowe zastosowania Zasady Minimum w rozumowaniach teorioliczbowych zobaczymy w dowodach twierdzeń T2.14 i T2.16. Teraz pokażemy na prostym przykładzie, jak to działa. Wybieramy w tym celu *dowód niewymierności* $\sqrt{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ nie jest kwadratem:

ZADANIE 1.1 Udowodnić, że jeżeli liczba naturalna n nie jest kwadratem żadnej liczby całkowitej, to nie jest też kwadratem żadnej liczby wymiernej.

[1] Liczby (naturalne) zdają mi się stanowić coś w rodzaju świata bytów obiektywnie istniejących z taką samą cechą absolutnej konieczności jaką ma, poznawany za pomocą zmysłów, świat realny.

ROZWIĄZANIE. Załóżmy, nie wprost, że istnieją takie ułamki $\frac{a}{b}$, że $a, b \in \mathbb{N}$, i dla których zachodzi równość $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, czyli równość $nb^2 = a^2$. Rozważmy więc (niepusty!) zbiór mianowników wszystkich takich ułamków $\frac{a}{b}$. Niech b_0 będzie najmniejszą liczbą w tym zbiorze. Wówczas

$$\frac{nab_0}{ab_0} = n = \frac{ka^2}{kb_0^2}$$

dla pewnego $a \in \mathbb{N}$ i dowolnej liczby $k \in \mathbb{N}$. Stąd

$$n = \frac{nab_0 - ka^2}{ab_0 - kb_0^2} = \frac{a}{b_0} \cdot \frac{nb_0 - ka}{a - kb_0} = \sqrt{n} \cdot \frac{nb_0 - ka}{a - kb_0} \tag{1.1}$$

na mocy zasady **odejmowania proporcji stronami** i założenia $\sqrt{n} = a/b_0$. Podnosząc równość (1.1) obustronnie do kwadratu i upraszczając przez n, dostajemy

$$n = \left(\frac{nb_0 - ka}{a - kb_0}\right)^2.$$

Połóżmy w tej równości k wyznaczone (jednoznacznie) z nierówności $k^2 < n < (k+1)^2$. Wówczas $kb_0 < a < kb_0 + b_0$, skąd $0 < a - kb_0 < b_0$ i widzimy, że dodatni mianownik $a - kb_0$ ułamka $\frac{nb_0 - ka}{a - kb_0}$ jest mniejszy niż b_0. Sprzeczność. ◊

Przykład. Dowodzimy: *Liczba* 1 *jest* najmniejszą *liczbą naturalną.* Rzeczywiście, jeżeli istnieją liczby naturalne mniejsze niż 1, to niech (Zasada Minimum!) n_0 będzie najmniejszą liczbą naturalną mniejszą niż 1. Wówczas $n_0^2 < n_0 < 1$. Sprzeczność. Q.e.d. ◊

Czytelnik zechce z pewnością udowodnić prawdziwość kolejnej zasady:

ZASADA SKWANTOWANIA *Jeżeli liczby całkowite a, b spełniają warunek $a > b$, to $a \geqslant b + 1$. W szczególności: jeżeli $c \in \mathbb{Z}$ i $c > 0$, to $c \geqslant 1$.*

Przykładowe zastosowanie Zasady Skwantowania widzimy w rozwiązaniu takiego zadania:

ZADANIE 1.2 Udowodnić, że jeżeli dla liczb naturalnych a, b, c, d, k, l zachodzi równość $bc - ad = 1$ i nierówności $\frac{a}{b} < \frac{k}{l} < \frac{c}{d}$, to $k \geqslant a + c$ i $l \geqslant b + d$.

ROZWIĄZANIE. Nierówność $\frac{a}{b} < \frac{k}{l}$ daje $0 < bk - al$. Stąd, ponieważ mamy do czynienia z liczbą całkowitą, dostajemy $1 \leqslant bk - al$. Mnożąc tę nierówność przez c, znajdujemy

$$c \leqslant c(bk - al) = bck - acl = (1 + ad)k - acl,$$

skąd $a(cl - dk) + c \leqslant k$, czyli $a + c \leqslant k$ (bo $cl - dk > 0$, więc $cl - dk \geqslant 1$). Podobnie, mnożąc nierówność $cl - dk \geqslant 1$ przez b, dostaniemy nierówność $b + d \leqslant l$. ◊

Często stosujemy również Zasadę Maksimum:

ZASADA MAKSIMUM *Każdy niepusty i ograniczony (od góry) zbiór liczb naturalnych zawiera dokładnie jeden element największy.*

ZADANIE 1.3 Udowodnić Zasadę Maksimum korzystając z Zasady Minimum.

ROZWIĄZANIE. Niech X będzie niepustym i ograniczonym podzbiorem zbioru liczb naturalnych. To znaczy, że istnieje takie $a \in \mathbb{N}$, że dla każdego $x \in X$ mamy $x \leqslant a$. Niech $Y = \{y \in \mathbb{N} : \forall_{x \in X}\, y \geqslant x\}$ będzie zbiorem wszystkich ograniczeń górnych zbioru X. Zbiór Y jest niepusty, bo $a \in Y$. Zawiera zatem element najmniejszy. Oznaczmy go m. Wówczas

$$m \geqslant x$$

dla każdego $x \in X$, bo $m \in Y$. Twierdzimy, że m należy do X i jest, wobec tego, największym elementem zbioru X. Gdyby $m \notin X$, to wszystkie nierówności $m \geqslant x$ byłyby ostre i wtedy (na mocy Zasady Skwantowania) mielibyśmy $m - 1 \geqslant x$ dla każdego $x \in X$. To jednakże jest niemożliwe, bo m jest najmniejszym elementem zbioru Y. $\Diamond$

Ćwiczenie 1.1 Udowodnić Zasadę Minimum korzystając z Zasady Maksimum.

1.1.2 Zasada Indukcji Matematycznej

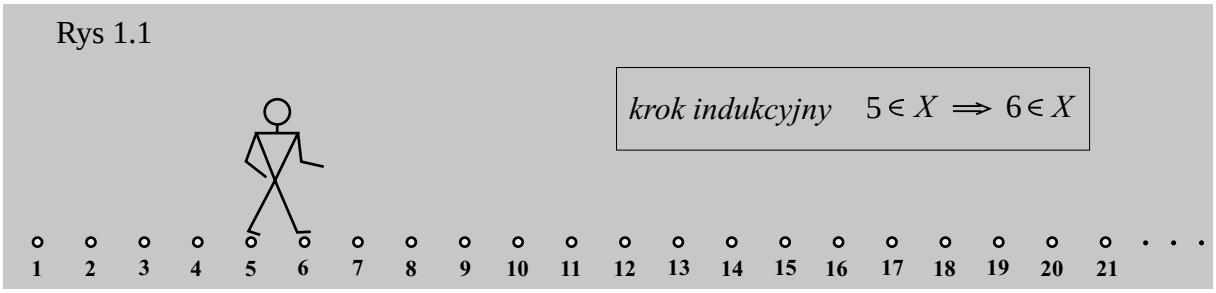
Zasada Indukcji Matematycznej jest (logicznie) równoważna Zasadzie Minimum, ale często bywa wygodniejsza w stosowaniu.

ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ *Niech $X \subseteq \mathbb{N}$ będzie podzbiorem zbioru liczb naturalnych. Załóżmy, że spełnione są warunki:*

$$\text{(B)} \quad \boxed{1 \in X}, \qquad \text{(I)} \quad \boxed{k \in X \Rightarrow k+1 \in X}.$$

Wówczas $X = \mathbb{N}$.

Podzbiór X zbioru liczb naturalnych nazwiemy **podzbiorem induktywnym**, gdy spełnia warunek (I). Zasada Indukcji Matematycznej mówi po prostu, że *zawierający liczbę* 1 *podzbiór induktywny zbioru liczb naturalnych jest c a ł y m zbiorem liczb naturalnych* $\mathbb{N}$.



P r z y k ł a d. Udowodnimy, że *suma wszystkich liczb naturalnych niewiększych niż n wynosi* $\frac{n(n+1)}{2}$. Oznaczmy tę sumę przez S_n. Mamy udowodnić, że zbiór

$$X = \left\{ k \in \mathbb{N} : S_k = \frac{k(k+1)}{2} \right\}$$

jest całym zbiorem liczb naturalnych. W pierwszym kroku sprawdzamy, czy zbiór X spełnia warunek (B) (zwany **warunkiem bazowym**). Tę część rozumowania nazywamy **bazą** rozumowania indukcyjnego. W aktualnym przypadku warunek bazowy jest spełniony (bowiem

$1 = \frac{1\cdot 2}{2}$). Sprawdzenie zachodzenia warunku (I), czyli induktywności zbioru X, nazywa się **krokiem indukcyjnym** rozumowania indukcyjnego. Załóżmy więc, że liczba naturalna k należy do X. Wówczas, w aktualnym przypadku,

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

więc $k+1 \in X$. Dzięki ZIM (Zasadzie Indukcji Matematycznej) widzimy, że $X = \mathbb{N}$. $\Diamond$

Podobnie dowodzimy tez poniższego ćwiczenia:

Ćwiczenie 1.2 Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$:

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

2. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$,

3. $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} < \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$,

4. $\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ (n pierwiastków),

5. $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{4}{1+x^4} + \ldots + \dfrac{2^n}{1+x^{2^n}} = \dfrac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}} - \dfrac{1}{1-x}$ dla $|x| \neq 1$.

Ćwiczenie 1.3 Udowodnić poniższe wersje ZIM:

(1) *Jeżeli podzbiór* $X \subseteq \mathbb{N}$ *spełnia warunki*

$$\text{(B)}\quad \boxed{\boxed{1 \in X}}, \qquad \text{(IU)}\quad \boxed{\boxed{\{1,\ldots,k\} \subseteq X \;\Rightarrow\; k+1 \in X}},$$

to $X = \mathbb{N}$.

(2) *Jeżeli podzbiór* $X \subseteq \mathbb{N}$ *spełnia warunki*

$$\text{(B1-2)}\quad \boxed{\boxed{1,\, 2 \in X}}, \qquad \text{(I2)}\quad \boxed{\boxed{k \in X \;\Rightarrow\; k+2 \in X}},$$

to $X = \mathbb{N}$.

ZADANIE 1.4 Udowodnić, że zbiór $\mathcal{G} = \{0, 1, \ldots, 1023\}$ da się rozbić na sumę takich dwóch rozłącznych równolicznych podzbiorów $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, że dla każdego $k = 1, 2, \ldots, 9$ suma k-tych potęg liczb zbioru $\mathcal{A}$ równa jest sumie k-tych potęg liczb zbioru $\mathcal{B}$.

ROZWIĄZANIE. Po pierwsze dobrze jest się domyślić, że jest to zadanie dające się rozwiązać za pomocą indukcji. Mianowicie oznaczymy przez X zbiór takich liczb naturalnych n, dla których zbiór $\mathcal{G}(n) = \{0, 1, \ldots, 2^{n+1}-1\}$ można przedstawić w postaci sumy takich dwóch równolicznych podzbiorów $\mathcal{A}(n)$ i $\mathcal{B}(n)$, że dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$ suma k-tych potęg liczb zbioru $\mathcal{A}(n)$ równa jest sumie k-tych potęg liczb zbioru $\mathcal{B}(n)$. Nasze zadanie polega na udowodnieniu, że $9 \in X$. Wykażemy przez indukcję nierównie więcej: $X = \mathbb{N}$.

Korzystając z Zasady Indukcji zdefiniujemy zbiory $\mathcal{A}(n)$ i $\mathcal{B}(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Niech $\mathcal{A}(1) = \{0, 3\}$ i $\mathcal{B}(1) = \{1, 2\}$ (to jest **baza definicji indukcyjnej**). Następnie definiujemy

$$\mathcal{A}(n+1) = \mathcal{A}(n) \cup [\mathcal{B}(n) + 2^{n+1}], \quad \mathcal{B}(n+1) = \mathcal{B}(n) \cup [\mathcal{A}(n) + 2^{n+1}]. \tag{1.2}$$

[Używamy tu wygodnego skrótu $\mathcal{X} + a = \{x + a : x \in \mathcal{X}\}$ dla dowolnego podzbioru $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{N}$ i dowolnej liczby $a \in \mathbb{N}$.] To jest **krok indukcyjny definicji indukcyjnej** (= określenie obiektu następnego za pomocą poprzedniego lub poprzednich). Mamy więc na przykład:

$$\mathcal{A}(2) = \mathcal{A}(1) \cup [\mathcal{B}(1) + 4] = \{0, 3\} \cup [\{1, 2\} + 4] = \{0, 3\} \cup \{5, 6\} = \{0, 3, 5, 6\},$$
$$\mathcal{B}(2) = \mathcal{B}(1) \cup [\mathcal{A}(1) + 4] = \{1, 2\} \cup [\{0, 3\} + 4] = \{1, 2\} \cup \{4, 7\} = \{1, 2, 4, 7\}.$$

Łatwo, przez indukcję(!), sprawdzić, że zbiory $\mathcal{A}(n)$, $\mathcal{B}(n)$ są rozłączne i równoliczne. Czytelnik powinien bezwzględnie to zrobić.

Pozostało nam sprawdzenie, że $\sum_{x\in\mathcal{A}(n)} x^k = \sum_{x\in\mathcal{B}(n)} x^k$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i wszystkich $1 \leqslant k \leqslant n$. Robimy to, oczywiście, za pomocą indukcji matematycznej, której baza jest po prostu równością $0 + 3 = 1 + 2$.

Dla wykonania kroku indukcyjnego ustalmy liczby naturalne $k \leqslant n + 1$. Mamy wtedy

$$\sum_{x\in\mathcal{A}(n+1)} x^k = \sum_{x\in\mathcal{A}(n)} x^k + \sum_{x\in\mathcal{B}(n)} (x + 2^{n+1})^k = \sum_{x\in\mathcal{A}(n)} x^k + \sum_{x\in\mathcal{B}(n)} \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} x^{k-s} 2^{(n+1)s} =$$
$$= \sum_{x\in\mathcal{A}(n)} x^k + \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} 2^{(n+1)s} \sum_{x\in\mathcal{B}(n)} x^{k-s} = \sum_{x\in\mathcal{G}(n)} x^k + \sum_{s=1}^{k} \binom{k}{s} 2^{(n+1)s} \sum_{x\in\mathcal{B}(n)} x^{k-s}.$$

Pierwsza równość wynika z (1.2), druga z twierdzenia o dwumianie (por. (1.7)), trzecia z przemienności sumy, a czwarta z równości $\mathcal{G}(n) = \mathcal{A}(n) \sqcup \mathcal{B}(n)$ (suma rozłączna, zob. $\mathbb{KOM}$). Dokładnie tak samo dostaniemy

$$\sum_{x\in\mathcal{B}(n+1)} x^k = \sum_{x\in\mathcal{G}(n)} x^k + \sum_{s=1}^{k} \binom{k}{s} 2^{(n+1)s} \sum_{x\in\mathcal{A}(n)} x^{k-s}.$$

Założenie indukcyjne, czyli równości $\sum_{x\in\mathcal{A}(n)} x^{k-s} = \sum_{x\in\mathcal{B}(n)} x^{k-s}$ dla wszystkich $s = 1, \ldots, k$ (przy czym w przypadku $s = k$ równość ta oznacza, po prostu równość mocy $|\mathcal{A}(n)| = |\mathcal{B}(n)|$) daje więc równość $\sum_{x\in\mathcal{A}(n+1)} x^k = \sum_{x\in\mathcal{B}(n+1)} x^k$. W ten sposób zadanie jest rozwiązane. $\Diamond$

Rozwiązując poniższe zadanie również należy postawić tezę ogólną (*dla dowolnego* n), a następnie udowodnić ją za pomocą ZIM.

ZADANIE HALMOSA. W pewnym miasteczku mieszka 345 zamężnych matematyczek. Każda z nich wie w każdej chwili czy mąż innej jest wierny czy nie, nic nie wie jednak o swoim mężu. Prawo tego miasteczka wymaga aby każdy, kto jest w stanie p r z e p r o w a d z i ć d o w ó d niewierności swojego partnera, zastrzelił go na specjalnym miejscu straceń tego samego dnia o zachodzie słońca. Każda matematyczka jest absolutnie inteligentna i absolutnie prawomyślna. Pewnego dnia pani burmistrz (jedyna niezamężna w miasteczku) ogłosiła, że w miasteczku s ą niewierni mężowie. Zakazała porozumiewania się paniom matematyczkom w rzeczonej sprawie,

jednocześnie nakazując przeprowadzanie rozumowań dowodowych. W rzeczywistości w miasteczku było 40 niewiernych mężów. Co się stanie w miasteczku po ogłoszeniu pani burmistrz?

Czasami niezbędne jest stosowne wzmocnienie tezy, która staje się założeniem w kroku indukcyjnym:

Ćwiczenie 1.4 Udowodnić za pomocą indukcji, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$h_n(2) := 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Wskazówka. Łatwiej dowodzić nierówności mocniejszej: $h_n(2) \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.

ZADANIE 1.5 Udowodnić, że Zasada Minimum jest równoważna Zasadzie Indukcji.

ROZWIĄZANIE. (1) Dowodzimy najpierw, że z ZIM wynika ZM. Postępujemy nie wprost. To znaczy, załóżmy, że zbiór $Y \subseteq \mathbb{N}$ jest podzbiorem niepustym bez elementu najmniejszego. Zdefiniujmy podzbiór $X \subseteq \mathbb{N}$:

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \{1, 2, \ldots, n\} \cap Y = \varnothing\}.$$

Jasne, że $1 \in X$ (bo $\{1\} \cap Y = \varnothing$, bowiem w przeciwnym przypadku liczba 1 byłaby elementem najmniejszym w Y). Zatem X spełnia warunek bazowy ZIM. Sprawdzimy, że X jest podzbiorem induktywnym: Niech $k \in X$. Wówczas $\{1, \ldots, k\} \cap Y = \varnothing$, więc, gdyby $\{1, \ldots, k, k+1\} \cap Y \neq \varnothing$, to liczba $k+1$ musiałaby należeć do Y i byłaby wtedy elementem najmniejszym w Y. Ponieważ założyliśmy, że w Y nie ma elementu najmniejszego, więc musi być $\{1, \ldots, k, k+1\} \cap Y = \varnothing$, czyli $k+1 \in X$. Zatem, na mocy ZIM, $X = \mathbb{N}$. To oznacza, że $Y = \varnothing$. Uzyskana sprzeczność kończy rozumowanie.

(2) Dowodzimy teraz, że z ZM wynika ZIM. Załóżmy, że $X \subseteq \mathbb{N}$ spełnia warunki (B) i (I) i że, nie wprost, $X \neq \mathbb{N}$. Wówczas $Y = \mathbb{N} \setminus X$ jest niepusty. Ma więc element najmniejszy n_0. Wtedy $n_0 - 1$ jest liczbą naturalną (!) należącą do X. Więc $n_0 = (n_0 - 1) + 1 \in X$, bo X jest induktywny. Sprzeczność. $\Diamond$

1.2 Działania algebraiczne

Podstawowym pojęciem w algebrze jest pojęcie działania (dwuargumentowego). **Algebra** jest działem matematyki badającym **struktury algebraiczne**, czyli zbiory z działaniami.

Definicja 1.1 Niech A będzie dowolnym zbiorem. Funkcję $f : A \times A \longrightarrow A$, która każdej uporządkowanej parze (α, β) elementów zbioru A przyporządkowuje element $f(\alpha, \beta)$ tego samego zbioru, nazywamy **działaniem dwuargumentowym** w zbiorze A. Na oznaczenie działania używamy jakiegoś specjalnego znaczka, na przykład $+, \cdot, \times, \circ, *$ (itp.), i zamiast $+(\alpha, \beta)$ (itp.) piszemy $\alpha + \beta$ (itp.). Element $\alpha * \beta \in A$ nazywamy **wynikiem** działania $*$ na parze $(\alpha, \beta) \in A \times A$.

Definicja 1.2 Działanie $* : A \times A \longrightarrow A$ nazywamy **łącznym**, gdy

$$\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma \tag{1.3}$$

dla dowolnych α, β, $\gamma \in A$. Działanie $*$ nazywamy **przemiennym**, gdy

$$\alpha * \beta = \beta * \alpha \tag{1.4}$$

dla dowolnych α, $\beta \in A$.

P r z y k ł a d 1. Znamy doskonale działania **dodawania** i **mnożenia** w zbiorze $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych. Działania te są łączne i przemienne. Również łączne i przemienne są działania dodawania i mnożenia w zbiorze $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych oraz w zbiorze $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych. Działania $- : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $:: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ odejmowania liczb rzeczywistych i dzielenia dodatnich liczb rzeczywistych nie są ani przemienne ani łączne. Działanie $\triangleright : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dane wzorem $a \triangleright b = 2a + b$ nie jest ani łączne ani przemienne. Na przykład $1 \triangleright 2 = 4 \neq 5 = 2 \triangleright 1$. Oraz $1 \triangleright (2 \triangleright 3) = 2 + (2 \triangleright 3) = 2 + (4 + 3) = 9$, a $(1 \triangleright 2) \triangleright 3 = (2 + 2) \triangleright 3 = 8 + 3 = 11$. Działanie $\triangle : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem $x \triangle y = \frac{x+y}{2}$ jest przemienne, ale nie jest łączne. Działanie max, które każdej parze $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ przyporządkowuje $\max\{a, b\}$, jest przemienne i łączne. $\Diamond$

U w a g a. Łączność działania jest w pewnym sensie bardziej podstawową jego własnością niż przemienność. Jeżeli dane działanie $*$ jest łączne, to można jednoznacznie zdefiniować *wynik* $\alpha * \beta * \gamma$ jako $\alpha * (\beta * \gamma)$ lub $(\alpha * \beta) * \gamma$. Podobnie ma się rzecz z $\alpha_1 * \alpha_2 * \ldots * \alpha_n$, gdzie tylko porządek α_i jest istotny. W szczególności, gdy wszystkie α_i są równe α dostajemy n-tą *potęgę* α^n. Prawidłowo należy ją określić indukcyjnie ($\alpha^1 = \alpha$ i $\alpha^{n+1} = \alpha^n * \alpha$), a zapisywać jakoś tak: α^{*n}.

Ćwiczenie 1.5 Niech X będzie dowolnym zbiorem niepustym i niech $\mathcal{B}ij(X)$ oznacza zbiór wszystkich bijekcji zbioru X na zbiór X. W $\mathcal{B}ij(X)$ określamy działanie **składania**: Jeżeli f, $g \in \mathcal{B}ij(X)$, to $f \circ g$ jest zdefiniowane przez $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ dla każdego $x \in X$. Udowodnić, że w ten sposób zdefiniowaliśmy działanie dwuargumentowe i że jest ono łączne, ale (gdy $|X| > 2$) nie jest przemienne.

Definicja 1.3 Jeżeli w pewnym zbiorze B zadane są dwa działania $\wedge$ i $\vee$, to mówimy, że działanie $\vee$ jest **rozdzielne względem działania** $\wedge$, gdy

$$u \vee (v \wedge w) = (u \vee v) \wedge (u \vee w) \tag{1.5}$$

dla dowolnych u, v, $w \in B$.

P r z y k ł a d 2. Działanie mnożenia liczb jest rozdzielne względem działania dodawania liczb (to znaczy, że $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dla dowolnych liczb a, b, c).

Ćwiczenie 1.6 W zbiorze $\mathcal{P}(X)$ wszystkich podzbiorów danego zbioru X znamy działania[2] **iloczynu** (oznaczanego symbolem $\cap$) i **sumy** (oznaczanego symbolem $\cup$). Udowodnić, że każde z nich jest rozdzielne względem drugiego.

[2]Używamy też nazw pełnych: **iloczyn teoriomnogościowy** i **suma teoriomnogościowa**. Zbiór $A \cap B$ nazywamy również **przekrojem** zbiorów A i B. Zobacz $\mathbb{KOM}$.

Definicja 1.4 Element $\varepsilon \in A$ nazywamy **elementem neutralnym** działania $*$ w zbiorze A, gdy dla dowolnego $\alpha \in A$ zachodzą równości:

$$\varepsilon * \alpha = \alpha * \varepsilon = \alpha. \tag{1.6}$$

P r z y k ł a d 3. Jasne, że liczba 0 jest elementem neutralnym dodawania liczb (naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych), liczba 1 jest elementem neutralnym mnożenia liczb. Zbiór *pusty* $\varnothing \in \mathcal{P}(X)$ jest elementem neutralnym sumy teoriomnogościowej, a zbiór *pełny* $X \in \mathcal{P}(X)$ jest elementem neutralnym iloczynu teoriomnogościowego w $\mathcal{P}(X)$. Zwykłe mnożenie w zbiorze $2\mathbb{Z}$ liczb całkowitych parzystych n i e ma elementu neutralnego! Również działanie $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto \min\{x, y\} \in \mathbb{R}$, nie ma elementu neutralnego. $\Diamond$

Ćwiczenie 1.7 Udowodnić, że działanie może mieć co najwyżej jeden element neutralny.

1.3 Grupa

Wprowadzimy teraz bardzo ważne pojęcie grupy.

Definicja 1.5 Trójkę $(\Gamma, *, \varepsilon)$, gdzie Γ jest zbiorem, $*$ jest działaniem $\Gamma \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$ oraz $\varepsilon \in \Gamma$, nazywamy **grupą**, gdy spełnione są następujące aksjomaty:

(1) działanie $*$ jest łączne (zobacz (1.3));

(2) element ε jest elementem neutralnym działania $*$ (zobacz (1.6));

(3) dla każdego $\alpha \in \Gamma$ istnieje taki element $\widetilde{\alpha} \in \Gamma$, że $\alpha * \widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha} * \alpha = \varepsilon$.

Ćwiczenie 1.8 Jeżeli $\alpha \in \Gamma$, to element $\widetilde{\alpha}$, którego istnienie zapewnia punkt (3), nazywa się **elementem odwrotnym** do α lub **odwrotnością** α. Udowodnić, że dany element grupy ma dokładnie jedną odwrotność. Oznaczamy ją α^{-1}.

Ćwiczenie 1.9 Udowodnić, że odwrotność odwrotności danego elementu równa jest temu elementowi: $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$.

Ćwiczenie 1.10 Dowieść, że jeśli α, β są elementami grupy, to $(\alpha * \beta)^{-1} = \beta^{-1} * \alpha^{-1}$.

U w a g a. Gdy zadanym działaniem $*$ w grupie jest **dodawanie** zazwyczaj oznaczane symbolem $+$, to mówimy, że ta grupa jest grupą **typu addytywnego**. W takim przypadku element neutralny ε nazywa się **zerem** i zazwyczaj oznacza symbolem 0, element odwrotny do α nazywa się **elementem przeciwnym** do α, i oznacza symbolem $-\alpha$. Wówczas równości w aksjomatach grupy z definicji D1.5 mają postać:

(1) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$,

(2) $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$,

(3) $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$.

Definicja 1.6 Jeżeli w danej grupie $(\Gamma, *, \varepsilon)$ działanie $*$ jest działaniem przemiennym, zobacz (1.4), to grupę nazywamy **grupą przemienną** (**komutatywną**) lub **grupą abelową**.

Ćwiczenie 1.11 Dowieść, że następujące pary[3] są grupami abelowymi: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\{+1, -1\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.

P r z y k ł a d. Najważniejszy przykład grupy spotykamy w ćwiczeniu C1.5. Odwrotnością bijekcji $f \in \mathcal{B}ij(X)$ jest, oczywiście, bijekcja odwrona f^{-1}. Elementem neutralnym zaś jest **identyczność** na X, oznaczana zazwyczaj Id_X. Grupa $(\mathcal{B}ij(X), \circ)$ nazywa się **grupą bijekcji** zbioru X. Grupa ta, zobacz C1.5, jest grupą abelową wyłącznie w przypadku, gdy $|X| \leqslant 2$. W przypadku gdy $X = [\,n\,] := \{1, 2, \ldots, n\}$, zbiór $\mathcal{B}ij(X)$ oznaczamy symbolem S_n, jego elementy nazywamy **permutacjami**, a samą grupę $(S_n, \circ)$ nazywamy n-tą **grupą symetryczną**. Ponieważ element $\sigma \in S_n$ jest funkcją określoną na zbiorze $[\,n\,]$, więc zadajemy go wypisując w jednej linii elementy zbioru $[\,n\,]$ a tuż pod nimi ich obrazy:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Zbiór S_n ma $n!$ (*en silnia*) elementów. Zobacz też $\mathbb{KOM}$. $\Diamond$

Ćwiczenie 1.12 Niech $\sigma, \tau \in S_7$ będą zadane przez

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć następujące elementy grupy S_7: $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, σ^4, τ^{-1}, $\sigma^{-3} := (\sigma^{-1})^3$.

Ćwiczenie 1.13 Niech α będzie elementem grupy $(\Gamma, *)$. Niech funkcja $f_\alpha : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ będzie zadana przez $f_\alpha(\xi) = \alpha * \xi$. Dowieść, że f_α jest bijekcją zbioru Γ. Dowieść też, że

$$f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha * \beta}, \quad \text{oraz} \quad (f_\alpha)^{-1} = f_{\alpha^{-1}}$$

dla dowolnych $\alpha, \beta \in \Gamma$.

1.4 Pierścień przemienny. Ciało

Pierścienie, jakie występują w dużych ilościach w elementarnej teorii liczb, należą do klasy pierścieni przemiennych z jedynką.

Definicja 1.7 Układ $(\mathcal{R}, +, \cdot, 0, 1)$, gdzie $\mathcal{R}$ jest zbiorem, $+$ i $\cdot$ są działaniami w zbiorze $\mathcal{R}$, zwanymi **dodawaniem** i **mnożeniem**, a $0 \in \mathcal{R}$ (**zero**) i $1 \in \mathcal{R}$ (**jedynka**) są dwoma wyróżnionymi elementami, nazywamy **pierścieniem przemiennym z jedynką**, gdy spełnione są następujące aksjomaty:

(1) $(\mathcal{R}, +, 0)$ jest grupą abelową;

(2) mnożenie $\cdot$ jest rozdzielne względem dodawania $+$;

(3) mnożenie $\cdot$ jest łączne i przemienne;

(4) jedynka 1 jest elementem neutralnym mnożenia.

[3]Gdy, wskazując grupę, podajemy tylko *parę* $(\Gamma, *)$, należy samodzielnie ustalić element neutralny, zobacz C1.7. Czasem, gdy z kontekstu jest jasne, jakie działanie mamy na myśli, wskazujemy tylko zbiór Γ.

P r z y k ł a d 1. Znane nam przykłady pierścieni (przemiennych z jedynką):

- **pierścień liczb całkowitych** $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$,
- **pierścień liczb wymiernych** $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$,
- **pierścień liczb rzeczywistych** $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$. $\Diamond$

ZADANIE 1.6 Udowodnić, że w każdym pierścieniu zachodzą równości

$$\textbf{(1)} \quad \alpha \cdot 0 = 0, \qquad \textbf{(2)} \quad (-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta.$$

ROZWIĄZANIE. (1) Mamy

$$\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0 + 0) = \alpha \cdot 0.$$

Pierwsza z tych równości wynika z rozdzielności mnożenia względem dodawania, druga z faktu, że 0 jest elementem neutralnym dodawania. Dodajmy teraz $-(\alpha \cdot 0)$ do lewej strony tej równości:

$$-(\alpha \cdot 0) + [\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0] = [-(\alpha \cdot 0) + \alpha \cdot 0] + \alpha \cdot 0 = 0 + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 0.$$

Dodając ten sam element $-(\alpha \cdot 0)$ do prawej strony dostajemy 0. W ten sposób równość (1) jest udowodniona. Dla sprawdzenia równości (2), zauważmy, że:

$$(-\alpha) \cdot \beta + \alpha \cdot \beta = (-\alpha + \alpha) \cdot \beta = 0 \cdot \beta = \beta \cdot 0 = 0.$$

Widzimy stąd, że $(-\alpha) \cdot \beta$ jest elementem przeciwnym do $\alpha \cdot \beta$. Zatem

$$(-\alpha) \cdot (-\beta) = -(\alpha \cdot (-\beta)) = -((-\beta) \cdot \alpha) = -(-(\beta \cdot \alpha)) = \beta \cdot \alpha = \alpha \cdot \beta.$$

Takiego typu proste manipulacje z aksjomatami pierścienia w dalszym ciągu będziemy pozostawiali Czytelnikowi. $\Diamond$

U w a g a. Gdy α jest elementem pierścienia $\mathcal{R}$ i n jest liczbą całkowitą, to definiujemy $n\alpha \in \mathcal{R}$ następująco: $0\alpha = 0$, $1\alpha = \alpha$, $(n+1)\alpha = n\alpha + \alpha$ dla $n \in \mathbb{N}$, oraz $n\alpha = -(-n)\alpha$, gdy $n < 0$.

Ćwiczenie 1.14 Niech α, β będą dowolnymi elementami pierścienia. Udowodnić szczegółowo (przez indukcję), że dla $m, n \in \mathbb{Z}$ prawdziwe są równości: **(1)** $n(m\alpha) = (nm)\alpha$, **(2)** $(n+m)\alpha = n\alpha + m\alpha$, **(3)** $n(\alpha + \beta) = n\alpha + n\beta$, **(4)** $(n\alpha) \cdot \beta = \alpha \cdot n\beta = n(\alpha \cdot \beta)$.

Ćwiczenie 1.15 Niech α będzie elementem pierścienia. Zdefiniować przez indukcję n-tą potęgę, α^n dla wykładnika naturalnego n. Następnie udowodnić przez indukcję, że $(\alpha^m)^n = \alpha^{mn}$ dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$.

Ćwiczenie 1.16 Udowodnić przez indukcję, że dla dowolnych elementów α, β pierścienia przemiennego i dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzą równości (piszemy $\varphi\psi$ zamiast $\varphi \cdot \psi$):

$$(\alpha + \beta)^n = \alpha^n + \binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta + \ldots + \binom{n}{n-1}\alpha\beta^{n-1} + \beta^n; \tag{1.7}$$

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \ldots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}). \tag{1.8}$$

Definicja 1.8 Element $\eta \in \mathcal{R}$ danego pierścienia $(\mathcal{R}, +, \cdot, 0, 1)$ nazywamy **jednością** lub **elementem odwracalnym**, gdy istnieje taki element $\xi \in \mathcal{R}$, że $\eta \cdot \xi = 1$. W takiej sytuacji element ξ nazywamy **odwrotnością** η i oznaczamy $\xi = \eta^{-1}$. Zbiór wszystkich jedności $\mathcal{R}$ oznaczamy symbolem $\mathcal{R}^*$.

Ćwiczenie 1.17 Udowodnić, że jeżeli $\mathcal{R}$ jest pierścieniem przemiennym z jedynką, to trójka $(\mathcal{R}^*, \cdot, 1)$ jest grupą abelową.

Ćwiczenie 1.18 Grupa $\mathcal{R}^* = (\mathcal{R}^*, \cdot, 1)$ nazywa się **grupą jedności pierścienia** $\mathcal{R}$. Wyznaczyć grupy jedności pierścieni $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$.

Definicja 1.9 Element α pierścienia $\mathcal{R}$ nazywamy **dzielnikiem zera**, gdy $\alpha \neq 0$ i w $\mathcal{R}$ istnieje taki element $\beta \neq 0$, że $\alpha \cdot \beta = 0$. Pierścień nie zawierający żadnych dzielników zera nazywa się **dziedziną całkowitości**. W dziedzinach całkowitości (zwanych też **pierścieniami bez dzielników zera**) zachodzi więc prawo: $\boxed{\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \ \textit{lub} \ \beta = 0.}$

Poznamy teraz definicję ciała:

Definicja 1.10 Pierścień przemienny z jedynką nazywa się **ciałem**, gdy każdy jego różny od zera element jest odwracalny. Jeżeli α jest niezerowym elementem ciała, to jego odwrotność oznaczamy α^{-1} lub $\frac{1}{\alpha}$. Konsekwentnie piszemy również $\frac{\alpha}{\beta}$ zamiast $\alpha\beta^{-1}$.

P r z y k ł a d. Z ćwiczenia C1.18 widzimy, że pierścienie $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ są ciałami. $\Diamond$

Ćwiczenie 1.19 Udowodnić, że *ciało jest dziedziną całkowitości.*

Ćwiczenie 1.20 Udowodnić, że *skończona dziedzina całkowitości jest ciałem.*

1.5 Liczby zespolone

Matematyka w żaden sposób n i e p o t r a f i się obejść bez liczb zespolonych. Również matematyka olimpijska wyraźnie kuleje bez tych liczb. Należy więc przyswoić sobie podstawową wiedzę ich dotyczącą. I m w c z e ś n i e j t y m l e p i e j.

Liczby rzeczywiste utożsamiamy z punktami prostej – **osi liczbowej**. Podobnie, liczby zespolone u t o ż s a m i m y z punktami płaszczyzny.

Definicja 1.11 Napis postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ nazywamy **liczbą zespoloną**. Zbiór liczb zespolonych oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$. W zbiorze tym wykonujemy działania **dodawania** i **mnożenia** następująco:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \tag{1.9}$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \tag{1.10}$$

Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych jest łatwe: mówi o tym reguła:

rób to co w szkole pamiętając, że $i^2 = -1$.

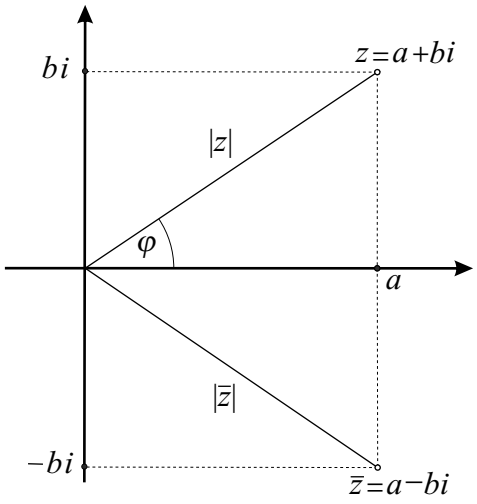
Wygodnym jest utożsamiać liczbę zespoloną $z = a + bi$ z punktem płaszczyzny o współrzędnych kartezjańskich (a, b). W takiej sytuacji odciętą a nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby z i oznaczamy $a = \mathrm{Re}\, z$, a rzędną b nazywamy **częścią urojoną** liczby z i oznaczamy $b = \mathrm{Im}\, z$. Utożsamiamy też liczbę rzeczywistą a z liczbą zespoloną $a + 0i$. W ten sposób traktujemy zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych jako p o d z b i ó r zbioru liczb zespolonych $\mathbb{C}$.

Geometrycznie, $\mathbb{R}$ pokrywa się z osią odciętych, zwaną w tym kontekście **osią rzeczywistą**. Oś rzędnych nazywamy wtedy **osią urojoną**. Liczby zespolone leżące na osi urojonej nazywa się **liczbami czysto urojonymi**.

Niech $z = a+bi$ będzie liczbą zespoloną. Kładziemy (zobacz rysunek obok):

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \overline{z} = a - bi.$$

Liczba rzeczywista(!) $|z|$ nazywa się **modułem** liczby zespolonej z. Jest ona odległością punktu (a, b) od początku układu współrzędnych. Liczbę $\overline{z}$ nazywamy liczbą **sprzężoną** (do) liczby z. Geometrycznie: $\overline{z}$ jest odbiciem punktu z w osi rzeczywistej.



Rys. 1.2

Ćwiczenie 1.21 Sprawdzić, że dla dowolnej liczby zespolonej z zachodzą następujące równości: $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re} z$ oraz $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$.

Ćwiczenie 1.22 Udowodnić równości:

$$\textbf{(1)}\quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \textbf{(2)}\quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \tag{1.11}$$

$$\textbf{(3)}\quad z \cdot \overline{z} = |z|^2, \qquad \textbf{(4)}\quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|. \tag{1.12}$$

Ćwiczenie 1.23 Udowodnić i podać interpretację geometryczną następującej, tak zwanej **nierówności trójkąta**: $\boxed{|z + w| \leqslant |z| + |w|}$ dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$. *Wskazówka.* Zobacz rysunek 1.3*a*.

Ćwiczenie 1.24 Sprawdzić, że jeżeli $z = a + bi \neq 0$, to liczba

$$z^{-1} := \frac{a}{|z|^2} + \frac{-b}{|z|^2} i = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

jest **odwrotnością** liczby z w tym sensie, że $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.

Fakt, że każda liczba zespolona $z \neq 0$ ma odwrotność z^{-1} (oznaczaną też oczywiście $\frac{1}{z}$) pokazuje, że w zbiorze $\mathbb{C}$ wykonalne jest **dzielenie** liczb (nie przez zero!). W praktyce dzielenie polega na mnożeniu licznika i mianownika przez liczbę sprzężoną do mianownika:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\, i.$$

Ćwiczenie 1.25 Uzasadnić, że $|z/w| = |z|/|w|$. Oraz, że niezerowa liczba $z \in \mathbb{C}$ ma moduł równy 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $z^{-1} = \overline{z}$.

Ćwiczenie 1.26 Niech $z = 2+3i$, $w = 4-i$. Narysować liczby z, $\overline{z}$, $z+w$, z^2, zw, $\overline{z}^3 w^{-2}$, a także zbiór $\{kz + lw : k, l \in \mathbb{Z}\}$.

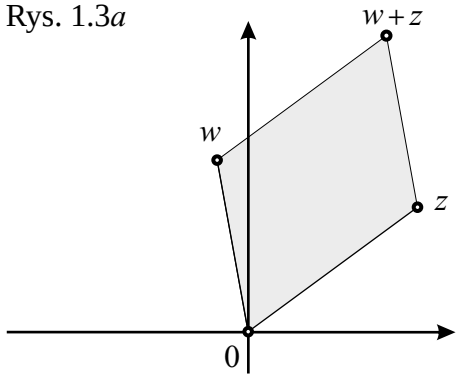
Ćwiczenie 1.27 Udowodnić, że *zbiór* $\mathbb{C}$ *wraz z wprowadzonymi działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem.* W szczególności w $\mathbb{C}$ nie ma dzielników zera, zobacz C1.19. To znaczy, że jeżeli $zw = 0$, to $z = 0$ lub $w = 0$, porównaj D1.9.

Interpretacja geometryczna dodawania i mnożenia

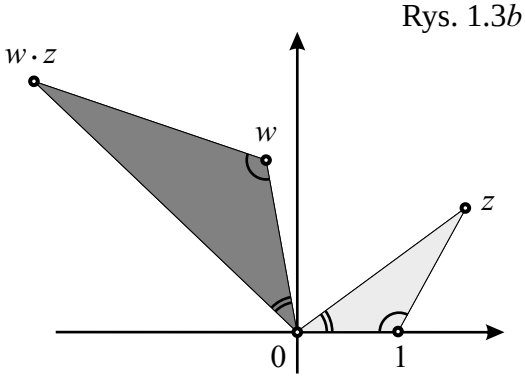
Bardzo ważnym jest zrozumienie geometrii liczb zespolonych. Sama algebra nie wystarczy!

Z formuły (1.9) łatwo wywnioskować, że punkt płaszczyzny odpowiadający sumie $w + z$ jest jednoznacznie wyznaczony przez warunek: *punkty odpowiadające liczbom* 0, w, $w + z$, z *są wierzchołkami równoległoboku*, zobacz rysunek 1.3*a*. Widzimy stąd i z **zasady równoległoboku** dodawania wektorów, że przekształcenie $A_w : z \longmapsto w + z$ polegające na dodawaniu ustalonej liczby zespolonej w do zmiennej liczby z jest, z geometrycznego punktu widzenia, **translacją**, która przesuwa punkt 0 w punkt w.

Rys. 1.3*a*



Rys. 1.3*b*



Aby zobaczyć interpretację geometryczną mnożenia liczb zespolonych użyjemy **współrzędnych biegunowych** (r, φ) niezerowego (tzn. różnego od początku układu) punktu (a, b), który utożsamiamy z liczbą zespoloną $z = a + bi$. Tutaj $r = |z|$ jest modułem liczby z, zaś φ jest miarą kąta między dodatnią częścią osi rzeczywistej i półprostą h_{0z}. Kąt ten nazywamy **argumentem** liczby z i oznaczamy $\operatorname{Arg} z$. Liczbę φ definiujemy z dokładnością do 2π. Jeżeli $\operatorname{Arg} z = \varphi$, to, z elementarnej trygonometrii, mamy (porównaj rysunek 1.2):

$$z = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.13}$$

Taki zapis nazywamy **postacią trygonometryczną** liczby zespolonej z.

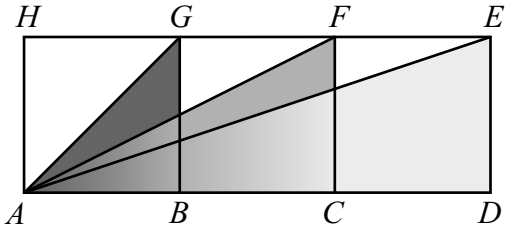
Pomnóżmy dwie liczby zespolone zadane w postaci trygonometrycznej:

$$\begin{aligned}|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot|w|(\cos\psi + i\sin\psi)\\ &= |z|\cdot|w|\left[(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)\right]\\ &= |zw|\left[\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\right].\end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z drugiej tożsamości (1.12) i z elementarnej trygonometrii, zobacz PLA T2.29. Wnioskujemy stąd, że zachodzi następująca *reguła mnożenia*:

mnożąc liczby zespolone mnożymy ich moduły i dodajemy ich argumenty.

Używając tej reguły z łatwością rozwiążemy ćwiczenie:



Rys. 1.4

Ćwiczenie 1.28 Niech $ABGH$, $BCFG$ i $CDEF$ będą kwadratami, zobacz rysunek 1.4. Wykazać, że suma miar kątów: $\sphericalangle DAE$, $\sphericalangle CAF$, $\sphericalangle BAG$ jest równa $90°$. *Wskazówka.* Pomnożyć: $(3+i)(2+i)(1+i)$.

Potęgowanie i pierwiastkowanie

Bardzo ważnym wnioskiem z reguły mnożenia jest ***wzór de Moivre'a***:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{1.14}$$

Wnioskiem ze wzoru de Moivre'a jest fakt, że dla liczby zespolonej $w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w \neq 0$, istnieje dokładnie n **pierwiastków n-tego stopnia z** liczby w:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \tag{1.15}$$

Należy tak długo przyglądać się liczbom z_k, aż stanie się jasne, że tworzą wierzchołki pewnego n-kąta foremnego i każda z nich spełnia warunek $z_k^n = w$. Patrz rysunek 1.5*a*.

Ćwiczenie 1.29 Przedstawić w postaci $a+bi$ liczby: $(1+i)^{2011}$, $(1+\sqrt{3}\,i)^{2010}$.

Ćwiczenie 1.30 Zapisać w postaci $a+bi$: $(1+i\operatorname{tg}\varphi)^n$, $(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$.

Ćwiczenie 1.31 Używając wzoru dwumiennego (zobacz (1.7)) i wzoru de Moivre'a udowodnić, że dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$ zachodzą równości

$$\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x, \quad \cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x.$$

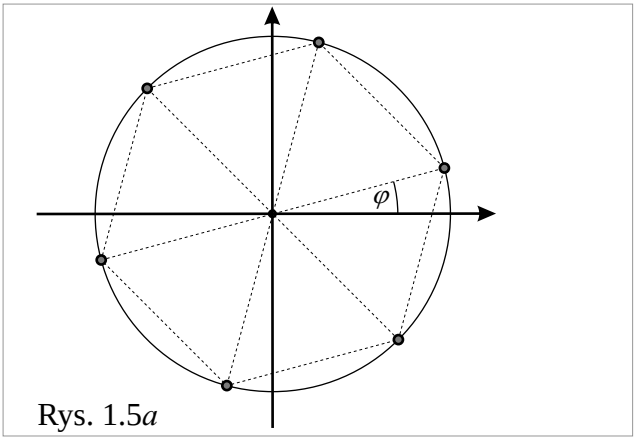
Ćwiczenie 1.32 Udowodnić, że jeżeli $az^2 + bz + c = 0$ dla pewnych liczb zespolonych $a \neq 0$, b, c i z, to zachodzi równość $z = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, gdzie $\sqrt{\Delta}$ oznacza jeden z pierwiastków stopnia drugiego z liczby $\Delta := b^2 - 4ac$.

Ćwiczenie 1.33 Każdy pierwiastek równania kwadratowego $z^2 - 2(\cos\varphi)z + 1 = 0$, przy dowolnym parametrze $\varphi \in \mathbb{R}$, jest liczbą zespoloną o module 1.

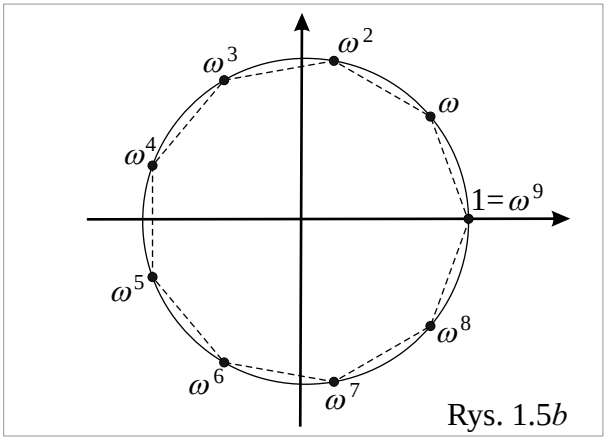
Ćwiczenie 1.34 Narysować 6-elementowy zbiór pierwiastków stopnia 6 z liczby i. *Wskazówka.* Zaznaczony na rysunku 1.5*a* kąt φ ma miarę $\pi/12$.

Szczególnie sympatycznym jest zbiór wszystkich pierwiastków n-tego stopnia z liczby 1.

Ćwiczenie 1.35 Udowodnić, że zbiór $\mu_n(\mathbb{C})$ wszystkich pierwiastków stopnia n z 1 jest grupą względem mnożenia.



Rys. 1.5*a*



Rys. 1.5*b*

Ćwiczenie 1.36 Udowodnić, że grupa $(\mu_n(\mathbb{C}), \cdot)$ jest grupą cykliczną[4].

Tożsamości trygonometryczne

Liczby zespolone, dzięki swojej budowie pozwalają zgrabnie uzasadniać tożsamości trygonometryczne, zobacz na przykład C1.31. Inny przykład widzimy w rozwiązaniu kolejnego zadania:

ZADANIE 1.7 Udowodnić, że dla dowolnego $x \neq 2l\pi$ zachodzi równość

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos kx = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

[4]Grupę Γ nazywamy **grupą cykliczną**, gdy istnieje taki element $\omega \in \Gamma$, że zachodzi równość zbiorów $\Gamma = \{\omega^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Patrz rysunek 1.5*b*, gdzie pokazano przypadek $n = 9$.

ROZWIĄZANIE. Weźmy liczbę zespoloną $z = \cos x + i \sin x$ i niech $w = \cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2}$ będzie (jednym z dwóch) pierwiastkiem kwadratowym z liczby z. Dzięki wzorowi de Moivre'a wiemy, że rozważana suma jest częścią rzeczywistą liczby

$$\frac{1}{2}\sum_{k=-N}^{N} z^k = \frac{1}{2}z^{-N}\sum_{k=0}^{2N} z^k = \frac{1}{2}z^{-N}\frac{z^{2N+1}-1}{z-1} = \frac{w(z^{N+1}w^{-1} - z^{-N}w^{-1})}{2w(zw^{-1} - w^{-1})},$$

czyli liczby

$$\frac{w^{2N+1} - \overline{w^{2N+1}}}{2(w - \overline{w})} = \frac{2i \sin(2N+1)\frac{x}{2}}{2 \cdot 2i \sin \frac{x}{2}}.$$

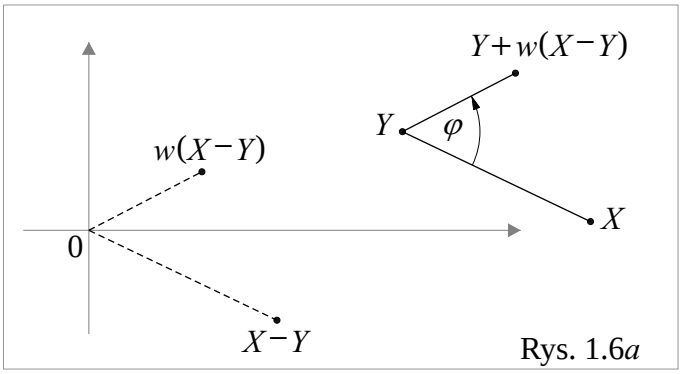
Należy tak długo sprawdzać napisane równości, aż wszystko będzie jasne. ◊

Ćwiczenie 1.37 Udowodnić, że $\sum_{k=0}^{N} \sin kx = \dfrac{\sin \frac{Nx}{2} \sin \frac{(N+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ dla $x \neq 2l\pi$.

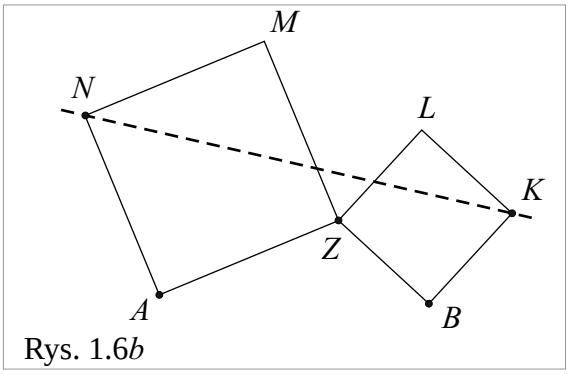
Obroty i podobieństwa spiralne

Z reguły mnożenia widzimy, że przekształcenie $M_w : z \longmapsto wz$, tzn. mnożenie przez ustaloną niezerową liczbę zespoloną w jest, z geometrycznego punktu widzenia, złożeniem $\mathrm{J}_0^{\lambda} \circ \mathrm{R}_0^{\varphi}$ dwóch przekształceń płaszczyzny: **obrotu** R_0^{φ} wokół punktu $0 = (0, 0)$ o kąt $\varphi = \operatorname{Arg} w$, i **jednokładności** J_0^{λ} o środku 0 i skali $\lambda = |w|$. Zobacz rysunek 1.3*b*, gdzie widać dwa podobne trójkąty $\triangle(0)(1)(z)$ i $\triangle(0)(w)(zw) = M_w(\triangle(0)(1)(z))$. W szczególności, mnożenie przez i jest obrotem wokół 0 o kąt prosty (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Podobnie, mnożenie przez $-i$ jest obrotem o kąt prosty, tym razem zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Złożenia obrotów i jednokładności o wspólnym środku nazywamy w geometrii **podobieństwami spiralnymi**, zobacz $\mathbb{PLA}$.

Liczby zespolone są wobec tego mocnym narzędziem rachunkowym w planimetrii, gdzie utożsamiamy punkty płaszczyzny z liczbami zespolonymi. Na rysunku 1.6*a* pokazujemy wynik podobieństwa spiralnego $\mathrm{J}_Y^{|w|} \circ \mathrm{R}_Y^{\operatorname{Arg} w}(X)$.



Rys. 1.6*a*



Rys. 1.6*b*

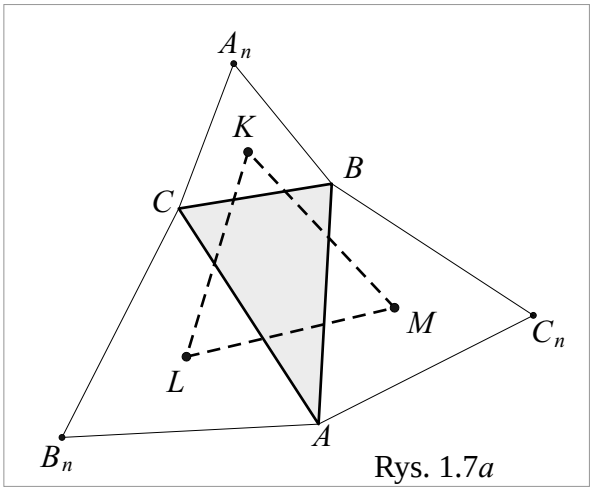
Pokażemy trzy klasyczne przykłady zastosowania tej idei w planimetrii.

ZADANIE 1.8 (***Zadanie o zakopanym skarbie.***) Na płaszczyźnie dane są ustalone dwa punkty A, B i zmienny punkt Z. Niech $ZBKL$ i $AZMN$ będą dwoma kwadratami zorientowanymi przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Udowodnić, że wszystkie proste l_{NK} przechodzą przez ten sam punkt (są współpękowe).

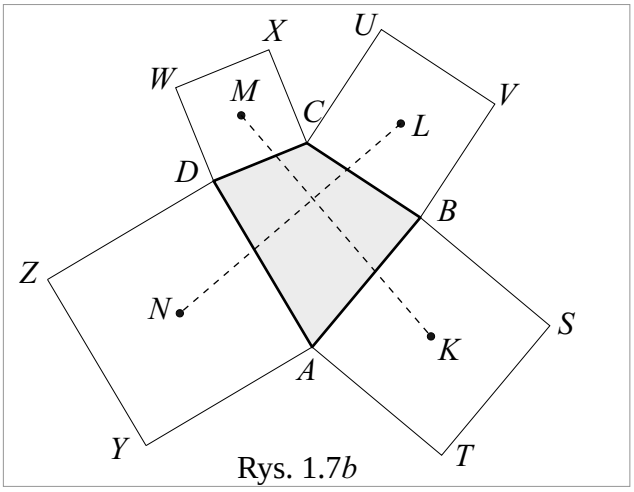
ROZWIĄZANIE. Mamy, wobec powyższego, $N = A + i(Z - A)$, $K = B + (-i)(Z - B)$. Zatem środek odcinka $\overline{NK}$ jest liczbą $\frac{N+K}{2} = \frac{A+B+i(B-A)}{2}$. Widzimy stąd, że środek odcinka $\overline{NK}$ nie zależy od wyboru punktu Z. Przez ten środek przechodzą (oczywiście) wszystkie proste l_{NK}. ◊

ZADANIE 1.9 (***Zadanie o trójkątach Napoleona***) Na zewnątrz danego trójkąta $\triangle ABC$, na jego bokach, zbudowano trójkąty równoboczne $\triangle BCA_n$, $\triangle CAB_n$ i $\triangle ABC_n$. Udowodnić, że środki ciężkości tych trójkątów są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

ROZWIĄZANIE. Oznaczmy $\omega = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. Mnożenie przez liczbę ω jest więc obrotem o kąt $\frac{\pi}{3} = \mathrm{Arg}\omega$. Wobec tego, $A_n = C + \omega(B - C)$, $B_n = A + \omega(C - A)$ oraz $C_n = B+\omega(A-B)$, zob. rys. 1.7*a*. Chcemy uzasadnić, że zachodzi równość $\omega(L-K) = M-K$. Ponieważ środek ciężkości K jest średnią arytmetyczną odpowiednich wierzchołków, więc, $3K = A_n + B + C = (1 + \omega)B + (2 - \omega)C$. Podobnie, $3L = (1 + \omega)C + (2 - \omega)A$ i $3M = (1+\omega)A+(2-\omega)B$. Korzystając z tych równości i (łatwej do zobaczenia, sprawdzić!) równości $\omega^2 + 1 = \omega$, po prostych rachunkach, dostaniemy równość $\omega(3L - 3K) = 3M - 3K$, czyli tezę. ◊



Rys. 1.7*a*



Rys. 1.7*b*

ZADANIE 1.10 (***Zadanie van Aubela***) Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ i kwadraty zewnętrzne $ABST$, $BCUV$, $CDWX$, $DAYZ$, zobacz rysunek 1.7*b*. Udowodnić, że jeżeli K, L, M, N są środkami tych kwadratów, to $\overline{KM} \perp \overline{LN}$ oraz $|KM| = |LN|$.

ROZWIĄZANIE. Niech $w = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$. Jasne, że jeżeli $EFGH$ jest kwadratem (zorientowanym dodatnio, tzn. tak jak kwadrat o wierzchołkach 0, 1, $1 + i$, i), to jego środek jest obrazem $\mathrm{J}_E^{|w|}(\mathrm{R}_E^{\pi/4}(F))$. Zatem, zgodnie z powiedzianym,

$$K = B + w(A - B), \quad L = C + w(B - C), \quad M = D + w(C - D), \quad N = A + w(D - A).$$

Korzystając z tych równości wyznaczamy

$$M - K = D - B + w(-A + B + C - D), \quad N - L = A - C + w(-A - B + C + D).$$

Sprawdzenie równości $M_K = i(N - L)$, z której wynika(!) teza, jest teraz oczywistym rachunkiem. Pozostawiamy go Czytelnikowi. Zauważmy jeszcze, że założenie o wypukłości czworokąta $ABCD$ jest zdecydowanie nadmiarowe. ◊